

شبیه‌سازی یک مدل برهم‌کنشی جدید خاک-تایر به روش اجزای محدود غیرخطی (۲۹۶)

محمد معراجی^۱، سعادت کامگار^۲، حسین اشرفی^۳

چکیده

روش‌های مدل‌سازی متعددی به منظور بررسی برهم‌کنش تایر بر روی خاک مورد استفاده قرار گرفته شده است. با ارتقای قابلیت‌های محاسباتی رایانه‌ها، تحلیل به روش اجزای محدود در این زمینه اهمیت بالایی به دست آورده است. اگرچه در حال حاضر مدل‌سازی برهم‌کنش خاک-تایر به روش اجزای محدود دستخوش تحولات سریعی شده است، هنوز تلاش به منظور دستیابی به دقت و اطمینان بالاتر وجود دارد. در این مقاله، یک مدل برهم‌کنشی جدید تایر و خاک با نگاهی خاص به مدل اجزای محدود دوبعدی رشته‌های مقاوم تایر شبیه‌سازی شده است. در مقایسه با سایر مدل‌های موجود، هدف در این مدل جدید، یافتن یک رابطه‌ی ریاضی برای کل تایر نیست، بلکه اجزای اصلی ساختار مکانیکی تایر مبنای کار قرار گرفته شده است. در این مقاله، نحوه مدل‌سازی الیاف مقاوم تایر به عنوان پیچیده‌ترین بخش مدل اجزای محدود دو بعدی به طور کامل بحث شده است. همچنین بازسازی مدل دیواره‌ی تایر به عنوان یک ماده‌ی ابرالاستیک و مدل خاک نیز به عنوان یک ماده‌ی الاستوپلاستیک با بیان جزئیات ارائه شده است. نتایج شبیه‌سازی مدل جدید بر روی خاک‌های نرم که با نتایج آزمایش‌های عملی مقایسه شدند، تأییدکننده‌ی قابلیت‌های این مدل عددی می‌باشند.

کلیدواژه: برهم‌کنش خاک-تایر، روش اجزای محدود غیرخطی، الیاف مقاوم تایر

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، بخش مهندسی مکانیک ماشین‌های کشاورزی، دانشگاه شیراز، پست الکترونیک: mohammadmeraji@gmail.com

۲- استادیار، بخش مهندسی مکانیک ماشین‌های کشاورزی، دانشگاه شیراز

۳- دانشجوی کارشناسی ارشد، بخش مهندسی مکانیک ماشین‌های کشاورزی، دانشگاه شیراز

۱- مقدمه

مسئله‌ی برهمکنش تایر و خاک یکی از موضوعات مهم پژوهشی برای خودروسازان و محققین بخش مکانیک خاک می‌باشد. در گذشته تحقیقاتی در این زمینه صورت گرفته و بسته به اهداف مورد نیاز و انجام فرض‌های ساده‌سازی شده‌ای، مسئله برهمکنش تایر و خاک شبیه‌سازی شده و بعضاً با تغییر پارامترهای مؤثر بر عملکرد شبیه‌سازی تا حدی خواسته‌های مورد نیاز بهینه شدند. تمام نیروهای وارد از طرف زمین که از طریق تایر به خودرو اعمال می‌شود موجب حرکت خودرو شده و راننده را قادر به کنترل مسیر حرکت می‌نماید، بنابراین اهمیت بهینه‌سازی مسئله برهمکنش تایر و خاک آن است که موجب ارتقای خصوصیات دینامیکی خودروهای خارج از جاده می‌شود. افزایش خصوصیات دینامیکی تایر در مبحث خودروهای کشاورزی، افزایش توان مالبندی را به دنبال دارد. همچنین این امر موجب کاهش مقاومت غلتشی تایر شده که نتیجه‌ی عملی آن کاهش مصرف سوخت و افزایش بازده کششی می‌باشد. البته ممکن است که تحقق همزمان همه عملکردهای مطلوب میسر نباشد.

باید توجه داشت که در شرایط واقعی که آج‌های تایر بر روی سطح خاک تماس پیدا می‌کنند، بسیاری از مدل‌های عددی که با فرض پیوستگی مواد شبیه‌سازی، ایجاد شده‌اند توانایی مدل‌سازی و حل معادلات در لبه‌های نوک تیز آج را ندارند و به همین دلیل است که در غالب مدل‌های عددی، سطح تایر بدون برجستگی و صاف در نظر گرفته شده است. در برخی موارد برای در نظر گرفتن ناهمواری‌های سطح، ضریبی فرض شده و این ضرایب در مدل‌سازی دخالت داده شده است [۱].

متأسفانه علی‌رغم تلاش‌هایی که در سال‌های اخیر به مسئله مدل‌سازی برهمکنش تایر و سطح صلب انجام شده، در زمینه‌ی تایر و خاک کارهای کمی به ثمر نشستند شاید علت اصلی آن، طبیعت پیچیده‌ی ترکیبی ابرالاستیک تایر و حل همزمان با رفتار غیر خطی و تراکم پذیر الاستوپلاستیک خاک است. خاک به طور طبیعی ترکیبی از سه فاز مایع، جامد و گاز است که شامل سنگ‌های معدنی اولیه، کانی‌های رسی، سرامیک‌های دانه‌ای، مواد آلی، آب، نمک‌های غیر قابل حل، هوا، بخار آب و دیگر گازها است. وجود نایکنواختی‌ها در خاک موجب کاهش دقت و عدم قطعیت‌ها در نتایج حاصل شده می‌گردد. خاک رفتاری الاستیک پلاستیک از خود نشان می‌دهد یعنی هنگامی که تنش اعمال شده به آن از تنش تسلیم کمتر باشد، رفتار الاستیک از خود نشان می‌دهد ولی اگر تنش اعمالی بیشتر باشد، رفتار ماده تغییر می‌کند و وارد مرحله‌ی پلاستیک شده و متناسب با تنش اعمالی سختی خاک نیز تغییر می‌یابد. با وجود اینکه هم اکنون در روش اجزای محدود به منظور مدل‌سازی تماس در اجسام با محیط پیوسته‌ی خطی، تئوری‌هایی ارائه شده است ولی در محیط غیرخطی محدودیت‌ها همچنان وجود دارند که راه‌حل‌های پیچیده‌ای برای حل مسئله‌ی تماس دو جسم غیر خطی بکار می‌روند. در تماس دو جسم باید شرط عدم نفوذ در سطح مشترک همواره رعایت شود و این در حالی است که در نظر گرفتن رابطه‌ی برای بیان آن دشوار است و نیاز به اعمال فرض‌هایی برای ساده‌سازی دارد.

۲- مدل‌های برهمکنش خاک- تایر

معروفترین مدل برای شبیه‌سازی برهمکنش خاک- تایر، توسط بکر^۱ [۲] در سال ۱۹۶۹ میلادی ارائه شد و در سال‌های بعد و توسط محققین دیگر بهبود یافت. این مدل ریاضی، علی‌رغم سادگی در استفاده و امکان شبیه‌سازی سریع کامپیوتری، در برخی موارد به خصوص در خاک‌های با جریان تغییر شکل بالا، نتایج سؤال برانگیزی ارائه می‌دهد. مشکلات اصلی این مدل، مستقل در نظر گرفتن برهمکنش عمودی و محیطی خاک- تایر می‌باشد، که با وجود قابلیت استفاده در جاده‌های صلب، از اثرات خاک نرم بر تایر صرف نظر می‌شود.

با استفاده از تحلیل اجزای محدود، امکان فرض همزمان برهمکنش عمودی و محیطی خاک- تایر میسر می‌شود، که این قابلیت در خاک‌های چسبناک، امکان در نظر گرفتن تغییر شکل در تمام راستاها را ممکن می‌سازد. اولین رهیافت‌ها در محاسبه‌ی برهمکنش خاک- تایر به روش تحلیل اجزای محدود توسط یانگ^۲ و همکاران [۳ و ۴] انجام شد که در این تحلیل، خاک با مدل اجزای محدود بیان شد و به جای تایر، مقدار نشست و توزیع فشار تئوری جایگزین شد. رگلی^۳ و همکارانش [۵]، مدلی دوبعدی از تایر و خاک ایجاد کردند که در آن سطح تایر دارای آج‌های برجسته بوده و خاک نیز به صورت یک ماده‌ی الاستوپلاستیک در نظر گرفته شد. این رهیافت همبستگی زیادی با مکانیسم واقعی برهمکنش داشت، اما همچنان تأثیر مهم رشته‌های مقاوم تایر نشان

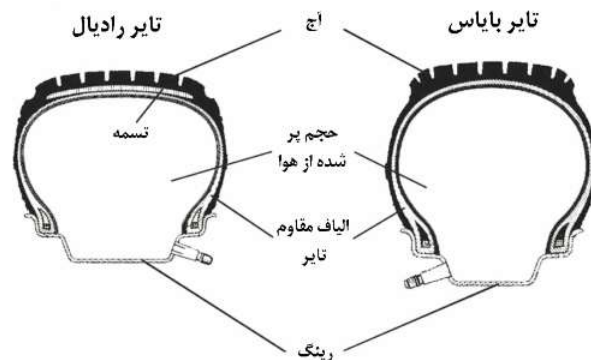
1- Bekker
2- Yong

3- Regli
4- Fervers

داده نشد. علاوه بر این مقادیر تراکم خاک و نیروهای محاسبه شده در لغزش های بالا با نتایج آزمایش ها اختلاف زیادی داشته اند. فرورز^۴ [۶] با شبیه سازی دوبعدی، مدلی برای برهمکنش تایر رادیال و خاک ارائه کرد. در این مدل توجه بیشتری به ساختار اجزای تایر شده است و توانایی آن در مدل سازی تماس بر روی سطوح مختلف افزایش یافته است. اما این مدل توانایی شبیه سازی تایرهای بایاس را نداشته و علاوه بر آن در مدل سازی آج تایر و خاک، ساده سازی های زیادی صورت گرفته است.

۳- مدل های تیر

با توجه به ساختار تایر بادی (شکل ۱)، بخش های اصلی تایر شامل آج، الیاف مقاوم تایر، حجم پر شده از هوا، تسمه (که فقط در تایرهای رادیال وجود دارند) و رینگ می باشند. از میان اجزای تشکیل دهنده تایر، حجم هوای درون تایر و الیاف مقاوم تایر نقش مؤثرتری در رفتار دینامیکی و تغییر شکل تایر ایفا می کنند [۶]. این دو بخش به صورت سه بعدی به روش اجزای محدود به راحتی قابل مدل سازی می باشند. مدل های مختلف سه بعدی توانایی نشان دادن جزئیات بخش های مختلف تایر را دارا می باشند. اما حجم محاسبات مدل های سه بعدی به خصوص با در نظر گرفتن معادلات حاکمه ی غیر خطی تایر و خاک و مسئله ی تماس بسیار زیاد می شود، لذا به دلیل اینکه در بسیاری موارد تا حد قابل قبولی امکان کاهش حجم محاسبات به فضای دوبعدی وجود دارد، می توان با این ساده سازی، سرعت عملیات محاسباتی را تا حد زیادی افزایش داد. مدل های دوبعدی که تاکنون به منظور شبیه سازی تایر بر روی سطح صلب بکار رفته اند، به سه دسته اصلی تقسیم می شوند [۷ و ۸]. گروه اول شامل مدل های کلاسیک فنر-دمپر می باشند که اغلب برای شبیه سازی تایر بر روی سطح صلب به کار می روند. در این مدل، ایجاد تماس در یک نقطه اتفاق می افتد، از اینرو



شکل ۱- اجزای تشکیل دهنده ی تایر

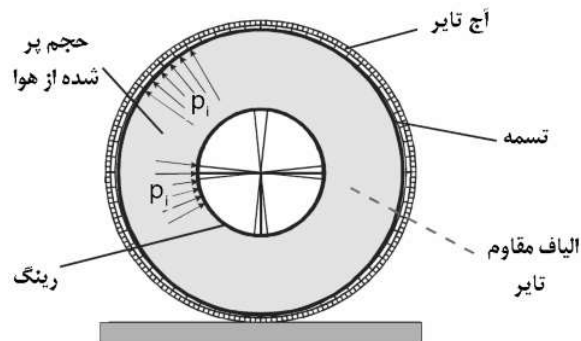
برای شبیه سازی تایر بر روی زمین تغییر شکل پذیر مناسب نمی باشند. گروه دوم دارای مرز خارجی برای تایر بوده و توانایی تماس بر روی زمین تغییر شکل پذیر را داراست ولی با توجه به رفتار مکانیکی تایر، قادر به محاسبه ی تغییر شکل واقعی در قسمت تایر به خصوص در فشار کم و تغییر شکل زیاد نیستند. گروه سوم شامل مدل های پارامتری مانند مدل پچکا می شوند. این مدل ها رابطه ی بسیار زیادی با شرایط واقعی دارند، زیرا با استفاده از اندازه گیری شرایط واقعی تایر ایجاد می شوند و لازم است که تایر تحت شرایط مختلف، آزمایش شود. بنابراین به منظور ایجاد یک مدل مناسب برای خاک های مختلف، نیاز به انجام تعداد زیادی آزمایش وجود دارد.

۴- ف مول بندی ریاضی رهیافت اجزای محدود

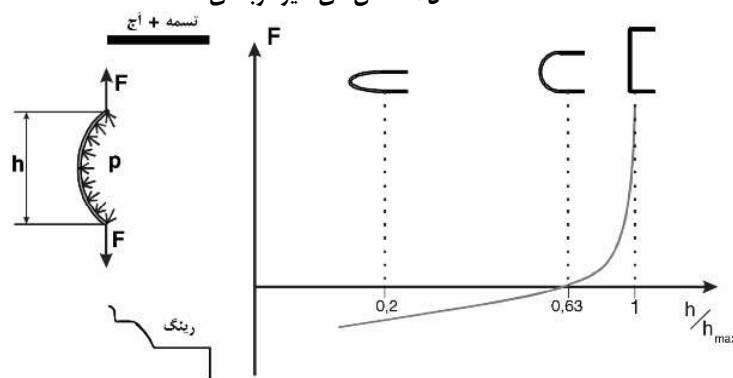
۴-۱- اصول کلی

اجزای تشکیل دهنده ی ساختار تایر در رفتار کلی مکانیکی تایر تأثیر گذار می باشند. از این میان، الیاف مقاوم تایر که دارای حرکات قابل ملاحظه در بعد سوم می باشد، برای مدل سازی دوبعدی از اهمیت بیشتری برخوردار می باشند. نقش الیاف مقاوم تایر در انتقال نیرو از آج تایر به رینگ بسیار مهم است. فشار درون تایر همانطور که در شکل ۲ هم نشان داده شده است، باعث ایجاد کشش در رشته های مقاوم تایر شده و وزن تایر نیز توسط همین نیروهای کششی تحمل می شود.

نیروی کششی که درون الیاف مقاوم به وجود می آید در راستای مستقیم کردن آنها صورت می گیرد، اما فشار باد داخل تایر موجب خمیده شدن راستای الیاف شده و راستای آن ها را تا حد امکان به شکل قسمتی از دایره شبیه می کند. از اینرو تغییر شکل الیاف همواره در معرض تعادل بین فشار باد تایر و کشش بین رینگ و آج تایر قرار دارد. از اینرو می توان نیروهای کشش موضعی الیاف تایر در سمت اتصال آن ها به رینگ و آج تایر را با استفاده از مقدار تغییر شکل ارتفاع پیشانی تایر (h) و فشار باد تایر (p) محاسبه کرد. این مقادیر هندسی به صورت شماتیک در شکل ۳ نشان داده شده اند.



شکل ۲- المان های تایر دوبعدی



شکل ۳- رفتار تغییر شکل در اثر اعمال نیرو در الیاف مقاوم تایر

المان های سازنده الیاف مقاوم تایر دارای رفتار کشش و فشار خاص بوده و این المان ها بین یک نقطه از رینگ و نقطه ی متناظر آن بر روی آج قرار خواهند گرفت. رابطه ی کشش و فشار در این المان، که نمودار آن در شکل ۳ مشخص است، از حل همزمان دو معادله ی رابطه (۱) حاصل می شود:

$$\begin{cases} \frac{h}{h_{max}} = \frac{\sin(\theta)}{\theta} \\ F = \frac{P \cdot h}{2 \cdot \tan(\theta)} \end{cases} \quad (1)$$

θ : زاویه بین امتداد مماس بر کمان و خط قائم می باشد؛ F : نیروی کشش الیاف در نقطه ی اتصال آنها به رینگ و آج می باشد؛ h و h_{max} به ترتیب ارتفاع پیشانی در شرایط آزمایش و بیشترین مقدار تئوری پیشانی تایر می باشند؛ و P : فشار باد تایر می باشد. قسمت لاستیکی تایر و آج نیز مانند رشته های مقاوم از اجزای تأثیرگذار در مسئله ی برهمکنش خاک- تایر می باشد که رفتار مادی آن مطابق با ماده ی ابرالاستیک می باشد. ابرالاستیک به ماده ای اطلاق می شود که می تواند کرنش های الاستیک بزرگ را به طور برگشت پذیر ارائه دهد. مواد لاستیکی و بسیاری از پلیمرها در این گروه قرار می گیرند. رفتار ساختاری این مواد معمولاً از انرژی کرنشی مشتق می شود. مدل ابرالاستیک برای آج با فرض همسانگرد و دما ثابت ایجاد شده است، که این فرض امکان توصیف

انرژی کرنشی را بر حسب نامتغیرهای^۱ کرنش میسر می کند. به جز برخی موارد استثنا، مواد در این مدل به طور تقریبی تراکم ناپذیر فرض می شوند.

عامل مهم و تأثیرگذار دیگر در این مسئله، خاک می باشد. برای شبیه سازی خاک از مدل الاستوپلاستیک استفاده شده است که کاربردی ترین مدل در بیان رفتار مکانیکی خاک به حساب می آید. رفتار مواد در یک مدل الاستوپلاستیک، دارای سه ویژگی عمده زیر می باشد:

- ۱- تا زمانی که به محدوده پلاستیک نرسیده ایم، رفتار ماده به صورت کاملاً الاستیک خواهد بود.
 - ۲- در مدل الاستوپلاستیک یک معیار تسلیم وجود دارد که در آن سطحی از تنش مشخص شده که بعد از آن جریان پلاستیک^۲ در ماده در نظر گرفته می شود.
 - ۳- رابطه بین تنش و کرنش برای رفتار بعد از تسلیم باید تغییر کند. در این زمان، هم مؤلفه ی الاستیک و هم مؤلفه ی پلاستیک وجود خواهند داشت [۹].
- بنابراین، تحلیل پلاستیک دارای سه رکن اساسی زیر می باشد:

۱- منحنی تنش- کرنش و معیار تسلیم

۲- قانون جریان

۳- قانون سخت شونده گی

در برخی موارد، خاک به عنوان تأثیرگذارترین عامل در مسئله ی برهمکنش تاپر و خاک مطرح می شود، از اینرو یک رابطه ی ریاضی مناسب که رفتار الاستوپلاستیک خاک را به خوبی نشان دهد، تضمین کننده ی صحت نتایج مدل سازی به حساب می آید. برای مدل سازی تماس در این شبیه سازی از روش ضریب لاگرانژ استفاده شده است. در این رهیاف با مقایسه ی فاصله ی دو گره که قرار است با هم تماس برقرار کنند، یک المان دو گره ای ساده در نظر گرفته می شود که در هنگام تماس دارای طول صفر یا منفی خواهند شد. این طول، ضریب لاگرانژ نامیده می شود و در معادله ی قیود دینامیکی اعمال می شود. این معادله با استفاده از روش تکرار نیوتن-رافسون^۳ حل می شود [۱۰ و ۱۱].

۴-۲- معادلات حاکمه

معادله ی حاکم بر رفتار ماده باید رابطه ی بین تنش و کرنش ایجاد شده در ماده را مشخص کند. روابطی که برای این منظور در مواد غیر خطی به کار می روند، در غالب موارد از اصل کار مجازی استفاده شده است. با استفاده از این اصل، تغییر مقدار انرژی کرنشی ذخیره شده در ماده، برابر با مقدار کار خارجی است که بر روی ماده انجام می شود. مقدار انرژی کرنشی ذخیره شده در آج تاپر به صورت دو بعدی به شکل زیر می باشد:

$$W = \frac{1}{2} \int_A \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dA \quad (2)$$

در این رابطه، A : مساحت مقطع ماده و W : مقدار انرژی کرنشی ذخیره شده در آن می باشد. تانسورهای تنش و کرنش در رابطه ی فوق به صورت زیر می باشند:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\} \quad (3)$$

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{xy}\} \quad (4)$$

به دلیل بزرگ بودن مقدار تغییر شکل ها، دیگر نمی توان از تانسور کرنش بینهایت کوچک استفاده نمود و علاوه بر آن در تعریف معادله ساختاری نیز بزرگ بودن تغییر شکل وارد می شود. تئوری هایی مختلفی در مدل سازی مواد ابرالاستیک ارائه شده اند که بسیاری از آنها از تابع انرژی کرنشی استخراج شده اند. در این شبیه سازی از مدل وونی-ریولین^۴ استفاده شده است، که شاید

1- Invariant

2- Plastic Flow

3- Newton-Raphson procedure

4- Mooney-Rivlin model

بتوان این مدل را معروفترین مدل ساختاری مواد ابرالاستیک دانست چرا که به خصوص برای مدل سازی لاستیک های طبیعی تراکم ناپذیر کاربرد فراوانی دارد. شکل انرژی پتانسیل کرنشی برای حالت ۲ پارامتری به صورت زیر می باشد:

$$W = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3) + \frac{1}{d}(J - 1)^2 \quad (5)$$

در این رابطه، (C_{10}, C_{01}, d) ثوابت مادی می باشند، (I_1, I_2) ناورداهای اول و دوم بوده و (J) ژاکوبین تئوسور تغییر شکل می باشد. کار خارجی وارد بر ماده از دو بخش کار ناشی از نیروهای حجمی و کار ناشی از نیروهای مرزی تشکیل شده که روابط آن ها در زیر آمده است:

$$W_{body} = \int_A \{u\}^T \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} dA = \int_A \{U\}^T [N]^T \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} dA \quad (6)$$

$$W_{surf} = \int_L \{u\}^T \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \end{Bmatrix} dL = \int_L \{U\}^T [N]^T \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \end{Bmatrix} dL \quad (7)$$

در این روابط (b_x, b_y) نیروهای حجمی در راستای x و y می باشند و (p_x, p_y) نیروهای اعمال شده به مرز جسم در راستای x و y می باشند.

تابع انرژی پتانسیل ماده به صورت رابطه ی زیر تعریف می شود:

$$\pi = W - W_{body} - W_{surf} \quad (8)$$

می توان نشان داد که مقدار π همواره ثابت است، از اینرو با مشتق گیری، صفر شده و معادله ی حاکمه ماده ی ابرالاستیک آج تائر تعیین می شود [۱۲].

خاک در این شبیه سازی به عنوان یک ماده ی الاستوپلاستیک مستقل از زمان در نظر گرفته شده است و با رسیدن به سطح تنش تسلیم، کرنش برگشت ناپذیر در آن اتفاق می افتد. کرنش پلاستیک در این حالت به مقدار تنش و تاریخچه ی تنش بستگی دارد. پس از گذر از تنش تسلیم، بخشی از رفتار خاک الاستیک و بخشی دیگر پلاستیک می باشد، از اینرو در طی نمو کرنش، تغییر کرنش قابل تقسیم به دو مؤلفه ی الاستیک و پلاستیک زیر می باشد:

$$d_{\bar{e}ij} = (d_{\bar{e}ij})_e + (d_{\bar{e}ij})_p \quad (9)$$

نمو کرنش الاستیک از طریق معادله ی (۲) با نمو تنش مرتبط می باشد. با توجه به اینکه تنش از دو بخش انحرافی^۱ و هیدرواستاتیک تشکیل شده است، نمو کرنش الاستیک به این شکل بیان می شود:

$$(d_{\bar{e}ij})_e = \frac{d\sigma'_{ij}}{2\alpha} + \frac{(1-2\nu)}{E} \delta_{ij} d\sigma_{kk} \quad (10)$$

در این رابطه، (E, ν) به ترتیب ضریب پواسون و مدول الاستیک خاک می باشند. نمو کرنش پلاستیک نیز متناسب با مقدار پتانسیل پلاستیک (Q) بر گرادیان تنش می باشد:

$$(d_{\bar{e}ij})_p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma'_{ij}} \quad (11)$$

در این رابطه، (λ) ضریب پلاستیک و (Q) پتانسیل پلاستیک و معرف جهت کرنش پلاستیک می باشد. در صورتی که تابع پتانسیل پلاستیک به عنوان سطح تسلیم انتخاب شود، قانون جریان از نوع مرتبط^۲ بوده که در این حالت جهت کرنش پلاستیک همواره در

جهت عمود به سطح تسلیم می باشد. می توان نشان داد که $\frac{\partial Q}{\partial \sigma'_{ij}}$ برابر است با:

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma'_{ij}} = \sigma'_{ij} \quad (12)$$

در این رابطه، برابر با مقدار تنش انحرافی می باشد. با استفاده از روابط فوق، رابطه ی حاکمه ی خاک پلاستیک به صورت زیر تعیین می شود:

1- Deviatoric

2- Associated Flow Rule

$$d_{ij} = \frac{d\sigma'_{ij}}{2\alpha} + \frac{(1-2\nu)}{E} \delta_{ij} d_{\sigma k k} + d\lambda \sigma'_{ij} \quad (13)$$

معیار تسلیم در بارگذاری چند محوره تنش که معرف سطح تسلیم می باشد، تابعی از تنشهای اصلی می باشد:

$$\sigma_e = f[\{\sigma\}] \quad (14)$$

در صورت فراتر رفتن تنش معادل محاسبه شده در حل الاستیک از تنش تسلیم، کرنش پلاستیک ظاهر خواهد شد. در این حالت، کرنش پلاستیک مقدار تنش را طوری کاهش می دهد که معیار تسلیم همواره ارضا شود. معیار تسلیم برای نمونه ای خاک از مدل دراکر-پراگر^۱ استفاده شده است. این معیار برای حالت قانون جریان مرتبط یا غیر مرتبط پیش بینی شده است. سطح تسلیم با افزایش تسلیم تغییر نخواهد کرد، لذا قانون سخت شونده وجود نداشته و ماده از نوع الاستیک-پلاستیک کامل در نظر گرفته می شود. تنش معادل در این حالت:

$$\sigma_e = 3\beta\sigma_m + \left[\frac{1}{2} \{S\}^T [M] \{S\} \right]^{0.5} \quad (15)$$

در این رابطه، ماتریس $[M]$ تغییرات تنش تسلیم را با جهت آن بیان می کند، (σ_m) تنش هیدروستاتیک، $\{S\}$ تنش انحرافی و β ثابت مادی بوده که از رابطه زیر به دست می آید:

$$\beta = \frac{2\text{Sin}(\phi)}{\sqrt{3}(3 - \text{Sin}(\phi))} \quad (16)$$

در این رابطه، (ϕ) زاویه اصطکاک داخلی می باشد. اگر تنش معادل که از رابطه فوق حاصل شد از تنش تسلیم که در معیار دراکر-پراگر از رابطه (۱۷) حاصل می شود، بیشتر شود، خاک از خود رفتار پلاستیک نیز نشان خواهد داد.

$$\sigma_y = \frac{6C \text{Cos}(\phi)}{\sqrt{3}(3 - \text{Sin}(\phi))} \quad (17)$$

که در آن (C) ضریب چسبندگی می باشد. تابع تسلیم که مقدار آن بر روی مرز تسلیم برابر با صفر است، به صورت رابطه زیر تعریف می شود:

$$F = 3\beta\sigma_m + \left[\frac{1}{2} \{S\}^T [M] \{S\} \right]^{0.5} - \sigma_y = 0 \quad (18)$$

با مشتق گیری از تابع تسلیم، مرز تسلیم به صورت رابطه زیر تعیین می شود:

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} = \beta [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T + \frac{1}{\left[\frac{1}{2} \{S\}^T [M] \{S\} \right]^{0.5}} \{S\} \quad (19)$$

با تعیین مرز تسلیم، محدوده ای از خاک که رفتار الاستیک یا رفتار پلاستیک از خود نشان می دهد، مشخص می شود، و با استفاده از رابطه (۱۰) برای مدل سازی رفتار بخش الاستیک و رابطه (۱۳) برای مدل سازی رفتار بخش پلاستیک، معادله حاکم بر رفتار مکانیکی خاک کامل می شود [۹].

ثوابت مورد نیاز در این مدل سازی با استفاده از دستگاه کشش تک محوری و دستگاه برش خاک با دقت بالا در دانشگاه شیراز اندازه گیری شدند.

۴-۳- خطی کردن معادلات

معادلات تعادل غیرخطی که تاکنون بیان کردیم، دارای دو نوع غیرخطواری هندسی^۲ و غیرخطواری مادی^۳ می باشند. با توجه به شرایط مادی و نیرویی داده شده در این معادلات غیر خطی، باید به منظور حل، آن ها را در یک شرایط تعادلی دچار تغییر ساختار کرد تا بتوان با خطی سازی آن ها و حل تکرار شونده معادلات حاصل، راهی برای یافتن پاسخ معادله غیر خطی حاصل شود. دو

1- The Drucker-Prager model
2- Geometrical Nonlinearity
3- Material Nonlinearity

رهیافت برای خطی سازی وجود دارد. رهیافت اول آن است که ابتدا معادلات تعادل تفکیک شوند و سپس با توجه به موقعیت گره ها خطی سازی انجام شود. در رهیافت دوم، ابتدا معادلات خطی شده و سپس تفکیک سازی صورت می گیرد. رهیافت دوم در زمینه مکانیک محیط های پیوسته مناسب تر بوده و در این پژوهش نیز روش دوم اتخاذ شده است، گرچه در برخی موارد نمی توان با استفاده از این روش تفکیک سازی غیر استاندارد انجام داد. روش نیوتن - رافسون، متداول ترین و مهم ترین روش جهت خطی سازی و حل معادلات غیر خطی می باشد. خطی سازی در این روش با انجام یک الگوریتم مشتق سوئی انجام می شود [۱۲].

۴-۴- رابطه اجزای محدود

با مشتق گیری سوئی از معادله ی (۸) در راستای خطوط وصل گره های هر المان از ماده ی ابرالاستیک آج، معادله ی اجزای محدود آن به دست می آید که در رابطه ی زیر نشان داده شده است:

$$K(x_k) u = -R(x_k) = -T(x_k) + F(x_k) \quad (20)$$

(x_k) مختصات فعلی گره های آج تایر است که (k) بار تحت الگوریتم نیوتن - رافسون اصلاح شده است. با تعیین مقدار جابجایی (u) در رابطه ی فوق، مقدار (x_{k+1}) نیز به صورت $(x_{k+1} = x_k + u)$ تعیین می شود. (T) و (F) به ترتیب نیروهای معادل بیرونی و درونی وارد بر آج در موقعیت جاری گره ها می باشند.

درایه های ماتریس سختی $[K]$ به صورت زیر تعیین می شود:

$$K_{ab}^{(e)} = K_{c,ab}^{(e)} + K_{\sigma,ab}^{(e)} - K_{p,ab}^{(e)} = \left(\int_{A^{(e)}} \sum_{k,l=1}^2 \frac{\partial N_a}{\partial x_k} c_{ijkl}^{sym} \frac{\partial N_b}{\partial x_l} dA \right) + \left(\int_{A^{(e)}} \sum_{k,l=1}^2 \frac{\partial N_a}{\partial x_k} \sigma_{kl} \frac{\partial N_b}{\partial x_l} \delta_{ij} dA \right) - \left(\frac{1}{2} \int_{\Gamma_\xi} p \frac{\partial x(\xi,\eta)}{\partial \xi} \left(\frac{\partial N_a}{\partial \eta} N_b - \frac{\partial N_b}{\partial \eta} N_a \right) d\xi + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_\xi} p \frac{\partial x(\xi,\eta)}{\partial \eta} \left(\frac{\partial N_a}{\partial \xi} N_b - \frac{\partial N_b}{\partial \xi} N_a \right) d\xi \right) \quad (21)$$

در این روابط، (a,b) شماره ی دو گره مجاور در المان آج می باشد، (N_i) ها توابع شکل، $(A^{(e)})$ مساحت المان (e) ، (η, ξ) دو بردار مبنای عمود بر هم در المان اصلی^۱، (Γ_ξ) مرز المان اصلی که بردار ξ می باشد، (c_{ijkl}^{sym}) تانسور متشکله متقارن شده^۲، (σ) تنش کوشی، $(x_{(\xi,\eta)})$ تابع درون یابی بر روی سطح المان و (P) فشار هیدرواستاتیک می باشند. ماتریس سختی کل که در رابطه ی (۲۱) نشان داده شده است، از سه بخش تشکیل شده که به ترتیب مؤلفه ی متشکله، مؤلفه ی تنش اولیه و مؤلفه ی نیروی خارجی نامیده می شوند.

برای حل باید معادله ی خطی شده ی (۲۰) یا (۲۱) به ازای فرضی حل شود و سپس (x_1, x_2, \dots) به دست آورده شده و مقادیر (F, R) اصلاح شوند. این عملیات تا زمانی ادامه پیدا می کند که مقدار تعیین شده ی مجاز از مقدار $\|R\|/\|F\|$ بزرگتر شود.

رابطه ی اجزای محدود خاک نیز دارای رابطه ای مشابه می باشد ولی مهمترین تفاوت در خاک، وجود دو معادله ی متشکله در خاک است که رفتار کلی خاک از مجموع نتایج حل این دو معادله تعیین می شود [۱۲]. برای تعیین رابطه ی اجزای محدود برای خاک ابتدا باید وضعیت الاستیک یا پلاستیک خاک تعیین شود که این کار از طریق محاسبه ی تنش تسلیم (σ_y) در هر گام افزایش بار و با استفاده از معادله ی (۱۷) در هر المان تعیین می شود.

تنش های ایجاد شده ی درون خاک نیز بر اساس کرنش آزمون (ϵ^T) محاسبه می شود. کرنش آزمون تفاضل بین کرنش پلاستیک در نمو قبلی و کرنش کل می باشد:

$$\{\epsilon_n^T\} = \{\epsilon_n\} - \{\epsilon_{n-1}^p\} \quad (22)$$

تنش آزمون نیز به صورت زیر تعیین می شود:

$$\{\sigma_n^T\} = [D] \{\epsilon_n^T\} \quad (23)$$

که در آن $[D]$ ماتریس تنش - کرنش خاک می باشد.

تنش معادل (σ_e) نیز از رابطه ی (۱۵) محاسبه می شود. در صورتی که (σ_e) کم تر از (σ_y) باشد، خاک الاستیک است و نمو کرنش پلاستیک صفر است. اما در صورتی که از تنش تسلیم فراتر رود، خاک وارد مرحله ی پلاستیک شده و نمو کرنش پلاستیک از رابطه ی زیر تعیین می شود:

1- Master Element

2- Summarized Constitutive Tensor

$$d\varepsilon^{pl} = \lambda \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \quad (24)$$

که در آن ضریب پلاستیک (λ) توسط فرآیند تکرارشونده نیوتن-رافسون از رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود:

$$\lambda = \frac{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [M][D]\{d\varepsilon\}}{-\left\{ \frac{\partial F}{\partial k} \right\} \{\sigma\}^T [M] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} [M] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [M][D] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\}} \quad (25)$$

با تعیین نمو کرنش پلاستیک، مقدار اصلاح شده‌ی کرنش پلاستیک نیز با استفاده از رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\{\varepsilon_n^{pl}\} = \{\varepsilon_{n-1}^{pl}\} + \{\Delta\varepsilon^{pl}\} \quad (26)$$

کرنش الاستیک نیز با استفاده از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$\{\varepsilon^{el}\} = \{\varepsilon^{tr}\} - \{\Delta\varepsilon^{pl}\} \quad (27)$$

اکنون بردار تنش نیز قابل محاسبه است:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon^{el}\} \quad (28)$$

برای قانون جریان پلاستیک غیر مرتبط، ماتریس تنش کرنش الاستوپلاستیک غیر متقارن خواهد بود. برای متقارن نمودن ماتریس در روش دراگر-پراگر، این ماتریس برای قانون جریان مرتبط، یک بار حساب می‌شود. بار دیگر در حالت قانون جریان غیر مرتبط نیز حساب شده و سپس دو ماتریس به دست آمده میانگین‌گیری می‌شود [۹].

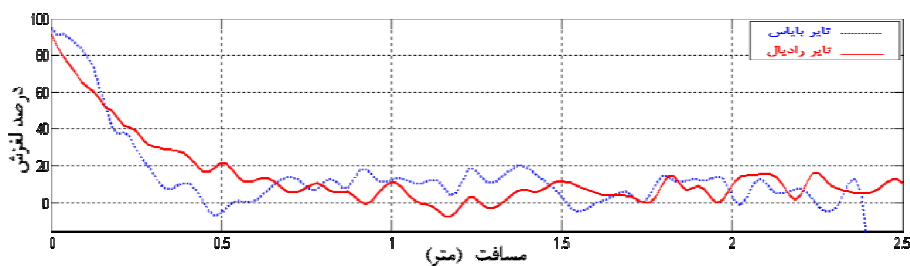
۵- نتایج آزمایش های عملی

آزمایش های تایر در دستگاه آزمونگر تک چرخ واقع در دانشگاه شیراز انجام شد. در این پژوهش، دو تایر بدون آج رادیال و بایاس مورد بررسی قرار گرفت که مشخصات آنها در جدول ۱ آورده شده است. نتایج این آزمایش ها با مقادیر حاصل از شبیه سازی به روش اجزای محدود مقایسه شدند. به منظور مقایسه ی بهتر رفتار دو تایر رادیال و بایاس، ابعاد و وزن آنها تقریباً یکسان در نظر گرفته شد.

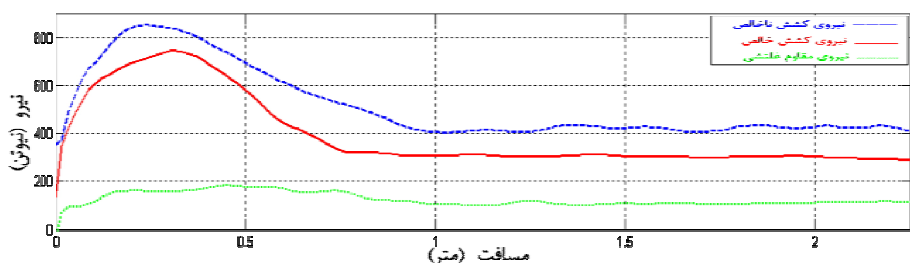
جدول ۱- مشخصات تایرهای رادیال و بایاس

نوع تایر	شماره تایر	شرکت سازنده	قطر خارجی	قطر رینگ	پهنای ماکزیمم	پهنای رد چرخ	وزن تایر و رینگ
رادیال	165 R 13	دنا	۵۸۳ mm	۱۳ اینچ	۱۶۵ mm	۱۳۵ mm	۱۲ Kg
بایاس	5.60 - 13	دنا	۵۷۷ mm	۱۳ اینچ	۱۴۲ mm	۱۰۳ mm	۱۲ Kg

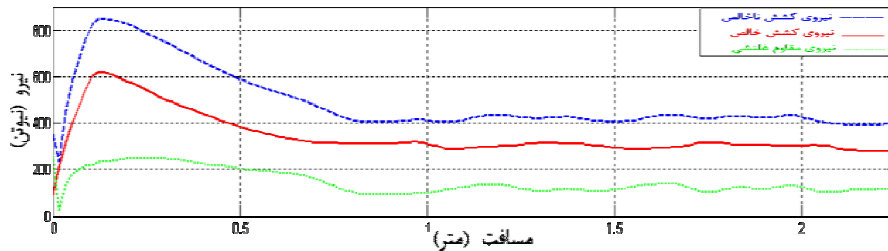
بار عمودی ۱۳۰ کیلوگرم و کشش خالص ۳۰۰ نیوتن بر روی هر دو تایر اعمال شدند. با توجه به اینکه دستگاه آزمونگر تایر در ابتدا از حالت سکون شروع به کار می کرد، حسگرهای دستگاه شرایط ناپایدار و شتابدار ابتدای مسیر را نیز اندازه گیری کردند، ولی به تدریج منحنی ها به شرایط نسبتاً پایداری میل کردند که مقادیر آنها در شکل های ۴ تا ۷ نشان داده شده است. در زمان شروع آزمایش، تایر توسط یک الکتروموتور شروع به چرخش کرد ولی همچنان حرکت انتقالی تایر که بر روی یک شاسی سنگین قرار داشت، مقدار ناچیزی بود از اینرو درصد لغزش تایرهای رادیال و بایاس در ابتدای مسیر حرکت از مقدار ۱۰۰ اندازه گیری شده است و نهایتاً به مقدار متوسط ۵/۵ درصد میل کرد (شکل ۴). همچنین تایر در ابتدای مسیر حرکت، علاوه بر تولید نیروی کشش خالص باید نیروی دالامبر که حاصل از شتاب دستگاه می بود را نیز فراهم می کرد از اینرو نیروی کشش ناخالص که توسط دو تایر تولید می شد در ابتدای مسیر زیاد بود. این نیروها برای تایرهای رادیال و بایاس به ترتیب در شکل های ۵ و ۶ نشان داده شده است.



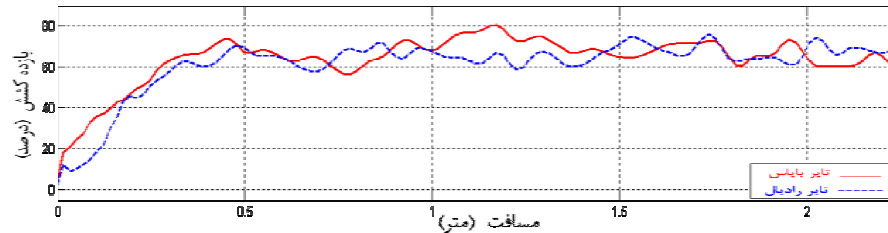
شکل ۴- درصد لغزش تایرهای رادیال و بایاس از زمان شروع حرکت تا انتهای مسیر



شکل ۵- نمودار نیروهای وارد بر تایر رادیال از زمان شروع حرکت تا انتهای مسیر



شکل ۶- نمودار نیروهای وارد بر تایر بایاس از زمان شروع حرکت تا انتهای مسیر

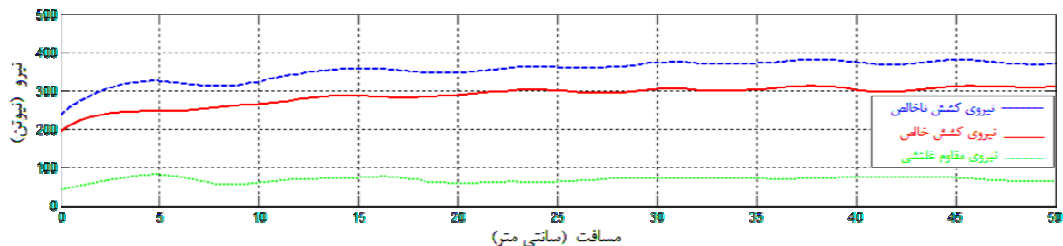


شکل ۷- نمودار بازده کشش تایرهای رادیال و بایاس از زمان شروع حرکت تا انتهای مسیر

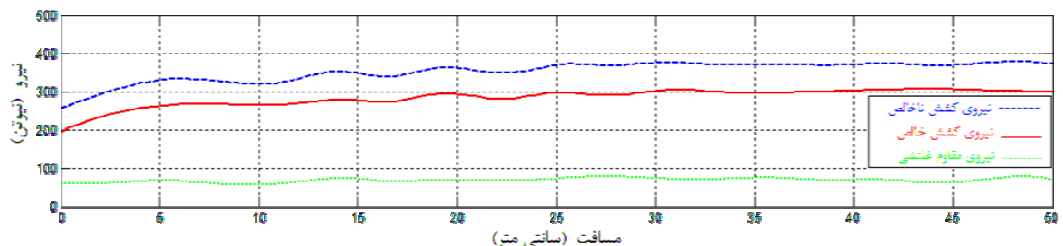
نیروی مقاوم غلتشی در آزمایش تایر رادیال مقدار کمتری نسبت به بایاس نشان دادند. با توجه به اینکه نیروی کشش خالص برای هر دو تایر برابر بود، نیروی کشش ناخالص تولید شده در تایر رادیال مقدار بیشتری به دست آمد که دلیل آن وجود مقاومت غلتشی بالاتر در تایر بایاس می باشد. بازده کششی که با استفاده از محاسبه ی لغزش و نیرو تعیین شد، برای دو تایر رادیال و بایاس در شکل ۷ نشان داده شده است. در ابتدای مسیر که نیرو و لغزش بیشتری وجود داشت، مقدار بازده کششی کمتری به دست آمد. دلیل این مسئله، وجود لغزش بسیار بالا بود و بازده کشش در لغزش بالا، مقداری پایین می باشد. در ادامه حرکت نیز با وجود اینکه نیروی کشش خالص کاهش یافت، ولی درصد لغزش کاهش بیشتری داشت که این موجب شد تا بازده کشش افزایش یابد. بازده کشش برای مسافت های بالای ۵۰ سانتی متر به طور متوسط در تایر رادیال ۷۱/۱۲ و در تایر بایاس ۶۸/۰۲ درصد مشاهده شدند.

۶- نتایج تحلیل عددی

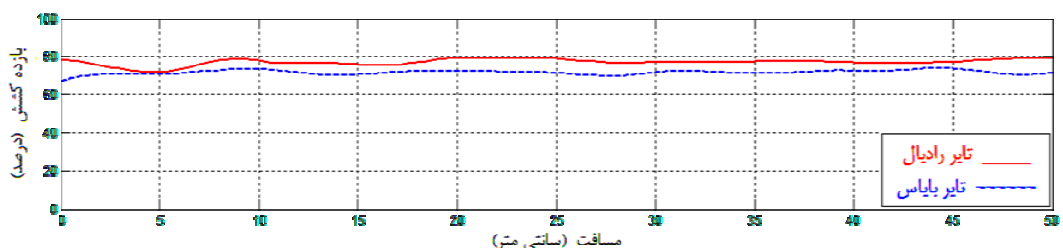
مدل عددی برهمکنش تایر و خاک قادر به محاسبه ی نیروهای کنش و واکنش بین دو سطح تماس تایر و خاک می باشد. به طور کلی، سه نوع نیرو به تایر اعمال می شود. بزرگترین آن ها نیروی کشش ناخالص است که باعث حرکت تایر به سمت جلو می شود. نیروی مقاوم غلتشی و نیروی کشش خالص نیز در خلاف جهت حرکت تایر به آن اعمال می شوند که مجموع آن ها با نیروی کشش ناخالص برابری می کند. نیروها با حل غیرخطی رابطه ی اجزای محدود برهمکنش تایر و خاک به ازای یک مقدار مشخص لغزش تعیین شدند. پاسخ این برهمکنش با نتایج آزمایش دستگاه آزمونگر تک چرخ مقایسه شد. در محاسبات عددی نیز به منظور مقایسه با نتایج عملی، مقدار لغزش برابر با شرایط آزمایشگاهی منظور شد و نتایج در شکل های ۸، ۹ و ۱۰ نشان داده شده است. در شکل ۸، منحنی شبیه سازی شده ی نیروهای وارد بر تایر رادیال نشان داده شده است. تغییر خواص مکانیکی المان های خاک در زیر تایر باعث شد که منحنی های شبیه سازی تا حدی ناهموار شوند. این ناهمواری در ابتدای برهمکنش تایر و خاک بیشتر اتفاق افتاد. در ابتدای شبیه سازی مقادیر نیروهای به دست آمده کمتر از حد انتظار بود ولی با طی شدن مسافتی معادل با مقدار شعاع چرخ، مقادیر حاصل به تعادل و پایداری قابل قبول دست یافتند. ناپایداری و خطا در ابتدای منحنی های شبیه سازی به دلیل عدم تحقق شرایط مرزی متعادل در ابتدای کار بود. همچنین یکنواخت شدن مرز تسلیم در انتهای مسیر باعث یکنواختی بیشتر منحنی ها شد. در شکل ۹ نیز منحنی شبیه سازی شده ی نیروهای وارد بر تایر بایاس نشان داده شده است. در مسافت های بالای ۲۵ سانتی متر، نیروی کشش ناخالص در تایر بایاس اندکی بیشتر از تایر رادیال است. همچنین نیروی مقاوم غلتشی متوسط در تایر بایاس حدود ۵/۱ درصد بیشتر به دست آمد. بازده کشش که منحنی آن در شکل ۱۰ آورده شده است، برای تایر رادیال ۶/۳ درصد بیشتر از تایر بایاس به دست آمد. این امر به دلیل بالاتر بودن درصد لغزش تایر بایاس اتفاق افتاد.



شکل ۸- نمودار نیروهای وارد بر تایر رادیال در حالت شبه استاتیک



شکل ۹- نمودار نیروهای وارد بر تایر بایاس در حالت شبه استاتیک



شکل ۱۰- نمودار بازده کشش تایرهای رادیال و بایاس در حالت شبه استاتیک

نتایج شبیه سازی عددی تایر و خاک در مقایسه با نتایج آزمایش های عملی اختلاف زیادی نداشتند. وجود همین مقدار خطا نیز از دو بخش خطاهای ناشی از شبیه سازی و اندازه گیری خارج نیست. بخش اول خطای شبیه سازی به روش اجزای محدود می باشد که به دلیل انجام فرض دوبعدی در مدل سازی، خطای تفکیک سازی در روش اجزای محدود و خطای ناشی از حل معادلات به روش اجزای محدود، به نتایج عددی وارد شده اند. تمام تلاش های صورت گرفته در این زمینه این بود که خطای شبیه سازی تا حد ممکن کوچک شود ولی امکان صفر کردن این خطا غیر ممکن است. خطای دیگر که موجب اختلاف در نتایج شبیه سازی تایر و خاک با نتایج آزمایشی شد، وجود خطا در اندازه گیری می باشد. به هر حال عدم وجود اختلاف زیاد بین نتایج شبیه سازی تایر و خاک و نتایج آزمایش نشان می دهد که در این میان خطای قابل توجهی وجود نداشته است. مقادیر اختلاف نتایج شبیه سازی با نتایج آزمایشی در جدول ۲ آورده شده است.

جدول ۲- اختلاف نتایج شبیه سازی و نتایج عملی برای تایرهای راد ال و بایاس

خطای بازده کشش (درصد)	خطای نیروی کشش خالص (درصد)	خطای نیروی کشش ناخالص (درصد)	
۸/۴۵	۸/۶۷	۵/۷۵	تایر رادیال
۷/۳۵	۹/۱	۵/۹	تایر بایاس

۸- نتیجه گیری

در این پژوهش یک مدل جدید از تایر دوبعدی ارائه شد که دارای توانایی های ویژه بوده و نتایج آزمایش های عملی نشان می دهند که می توان به نتایج این مدل سازی تا حد خوبی اطمینان کرد. به منظور انجام شبیه سازی دقیق، ضرایب مکانیکی خاک به دقت اندازه گیری شدند و شرایط آزمایش های عملی تا حد ممکن تأثیر داده شدند. شبیه سازی یک مدل جدید برهمکنش تایر- خاک و نتایج آزمایش ها نشان دادند که نیروی مقاوم غلتشی برای تایر رادیال در شرایط یکسان نسبت به تایر بایاس بر روی خاک رسی- لومی دارای مقدار کمتری بود. همچنین برای کشش خالص یکسان، درصد لغزش در تایر بایاس اندکی بیشتر از تایر رادیال بود ولی نیروی کشش ناخالص تغییر چندانی در دو تایر نداشتند. مدل شبیه سازی شده ی تایر و خاک، قادر به پیش بینی شرایط مختلف تایر و خاک نیز می باشد، که از آن جمله می توان به تأثیر لغزش بر نیروهای وارد بر تایرها، اثر تغییر فشار باد بر نیروهای وارد بر تایرها و همچنین اثر نوع خاک بر نیروهای وارد بر تایرها اشاره کرد.

مراجع

- [1] Cui, K. Defossez, P. and Richard, G. 2007. A new approach for modeling vertical stress distribution at the soil/tyre interface to predict the compaction of cultivated soils by using the PLAXIS code. *Soil & Tillage Research*, v(95): 277-287.
- [2] Bekker, M.G. 1969. *Introduction to Terrain Vehicle Systems*. Ann Arbor: The University of Michigan Press.
- [3] Yong, R.N. and Fattah, E.A. 1976. Prediction of wheel-soil interaction and performance using the finite element method. *Journal of Terramechanics*, v(13): 227-240.
- [4] Yong, R.N. Fattah, E.A. and Boonsinsuk, P. 1978. Analysis and prediction of tyre-soil interaction and performance using finite elements. *Journal of Terramechanics*, v(15): 43-63.
- [5] Regli, G. Handke, A. and Bütikofer, M. 1993. Material laws as a basis for simulation models for the calculation of wheel-soil interaction examination using the finite element method. *Journal of Terramechanics*, v(30): 165-179.
- [6] Fervers, C.W. 2004. Improved FEM simulation model for tire-soil interaction. *Journal of Terramechanics*, v(41): 87-100.
- [7] Wong, J.Y. 2001. *Theory of Ground Vehicles*. New York: John Wiley and Sons.
- [8] Gillespie, T.D. 1992. *Fundamental of vehicle dynamics*. USA: Society of Automotive Engineering (SAE Pub.), Inc.
- [9] Owen, D. and Hinton, E. 1986. *Finite Element in Plasticity: Theory and Practice*. Swansea: Pinerridge press.
- [10] Aliabadi, M.H. and Brebbia, C.A. 1993. *Computational Mechanics in Contact Mechanics*. Boston: Computational Mechanics Publications.
- [11] Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. 2000. *The Finite Element Method: The Basis*. London: Butterworth-Heinemann.
- [12] Bonet, J. and Wood, R. 1997. *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.