

مدل سازی و فرمول‌بندی اجزای محدود غیرخطی به منظور تحلیل عددی مسائل تماسی ویسکوالاستیک در جامدات بیولوژیکی (۲۷۲)

حسین اشرفی^۱، مهدی کسرائی^۲، مهرداد فرید^۳

چکیده

یکی از مشکلات اساسی در حوزه علم مهندسی بیوسیستم، آسیب‌های وارده به مواد بیولوژیکی فسدشونده مانند میوه‌ها و سبزیجات باغی در اثر ضربه و فشارهای تماسی شبه‌استاتیکی و دینامیکی می‌باشد. آسیب‌پذیری ناشی از تماس شبه‌استاتیکی یکی از مهمترین دلایل افت کیفیت در بازار میوه تازه محسوب می‌شود. نحوه توزیع فشار تماسی در سرتاسر ناحیه مشترک تماس از اهمیت ویژه‌ای به منظور تخمین‌پذیری آسیب‌های تماسی برخوردار است. شایان ذکر است که اکثریت تولیدات باغی بیولوژیکی رفتاری همانند جامدات ویسکوالاستیک از خود نشان می‌دهند. به طور کلی، تماس در جامدات تغییرشکل‌پذیر به دلیل آن که شرایط مرزی در ناحیه مشترک تماسی به طور پیوسته با اعمال نیرو تغییر می‌کنند، یک مسئله غیرخطی می‌باشد. از سوی دیگر، تنش‌های تماسی در جامدات ویسکوالاستیک، هم تحت تأثیر خواص الاستیک و هم خواص ویسکوز می‌باشند. از اینرو در چنین موادی، هم ناحیه مشترک تماسی و هم نحوه توزیع تنش‌های تماسی وابسته به زمان خواهند بود. بنابراین، در این مدل‌سازی یک مسئله تماسی غیرخطی وابسته به زمان در نظر گرفته شده است. هدف طرح حاضر، توسعه یک مدل محاسباتی نمونه بر مبنای الگوریتمی توانمند به منظور محاسبه فشارهای شبه‌استاتیکی تماسی اصطکاکی در جامدات بیولوژیکی ویسکوالاستیک می‌باشد. از مدل تعمیم یافته ماکسول برای مدل‌سازی رفتار جامدات ویسکوالاستیک بهره گرفته شد و بر اساس اصل کار مجازی، یک فرمول‌بندی مؤثر اجزای محدود با یک فرآیند وارهدگی نمونه در معادله متشکله ویسکوالاستیک حاصل شد. برای مدل‌سازی تماس نیز از رهیافت برنامه‌نویسی لاگرانژ الحاقی استفاده شد. در انتهای طرح نیز به عنوان یک نمونه کاربردی، فشار ناشی از تماس وارد بر میوه سیب در آزمایش فشاری با رهیافت عددی ارائه شده، شبیه‌سازی شد و منحنی نیرو-جابجایی غیرخطی آن با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شد.

کلیدواژه: مسائل تماسی ویسکوالاستیک، روش اجزای محدود، جامدات بیولوژیکی، مدل تعمیم یافته ماکسول

۱- دانشجو کارشناسی ارشد، بخش مهندسی مکانیک ماشین‌های کشاورزی، دانشگاه شیراز، پست الکترونیک ashrafi@shirazu.ac.ir

۲- استادیار بخش مهندسی مکانیک ماشین‌های کشاورزی، دانشگاه شیراز

۳- استادیار بخش مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز

مقدمه

مسائل مقادیر مرزی در برگیرنده تماس در مواد ویسکوالاستیک، یکی از با اهمیت ترین مسائل در صنایع وابسته به مهندسی مکانیک جامدات، سازه و همچنین علوم پزشکی، بیوسیستم و محیط زیست می باشند. در گذر، اغلب در فرآیندهای طراحی، مسائل مرتبط با مکانیک تماس به دلیل طبیعت غیرخطی با فرضیات خاصی به طور تقریبی حل می شدند. امروزه، با گسترش سریع تکنولوژی کامپیوترهای مدرن، می توان با بکارگیری ابزاری به نام **مکانیک محاسباتی**، مکانیسم های تماس را به طور عددی، شبیه سازی کرد. اگر چه این شبیه سازی ها با دقتی که برای اهداف طراحی کافی است، قادر به انجام می باشند، با این وجود، در شرایط کنونی اکثر نرم افزارهای استاندارد اجزای محدود، به طور کامل و دقیق قادر به حل مسائل تماسی اصطکاکی با الگوریتم هایی توانمند نیستند. علت اصلی آن، بدین دلیل است که هنوز در بین محققان انجمن اجزای محدود، رقابت گسترده ای به منظور بکارگیری روش هایی مؤثر و توانمند برای شبیه سازی دقیق تر مسائل مهندسی در مکانیک تماس محاسباتی وجود دارد [۱-۲].

از کاربردهای عمده تحلیل مسائل تماسی در مهندسی مکانیک، طراحی سیستم های ترمزی، بادامک ها، یاتاقان ها، چرخ نده ها و تایرها را می توان نام برد، که با رفتار الاستیسیته خطی، معمولاً قابل مدل سازی می باشند. از سیر کاربردهای مسائل تماسی در این حیطه مهندسی، می توان به بررسی پدیده ضربه در خودروها و نیز فرآیندهای مته کاری، برش و شکل دهی فلزات نظیر ورقکاری و یا شکل دهی حجمی اشاره کرد. در سال های اخیر هم مسائلی که تغییر شکل های بزرگ را در نظر می گیرند و از معادلات متشکله غیرالاستیک بهره می بردند، مورد توجه قرار گرفته اند. آسیب های وارده به مواد بیولوژیکی فاسدشونده نظیر میوه ها در اثر ضربه و فشارهای تماسی شبه استاتیکی و دینامیکی، یکی از مسائل قابل توجه در حوزه علم مهندسی بیوسیستم می باشد. اکثر تولیدات باغی (میوه ها) در اثر تحمل فشارهای تماسی در طی یک سری فرآیندها مانند برداشت، بسته بندی، حمل و نقل، بسته بندی، فرآوری و انبارداری در معرض آسیب های مکانیکی واقع می شوند. آسیب لهیدگی^۱ ناشی از تماس شبه استاتیک یکی از مهمترین دلایل افت کیفیت در بازار میوه تازه محسوب می شود. به طور کلی سالانه، درصد بسیار زیادی از تولیدات باغی از بین می روند که علت اصلی این ضایعات، ایجاد لهیدگی شناخته شده است [۳-۵]. به طور کلی، لهیدگی به عنوان ایجاد آسیب و تغییر رنگ در سطح بدنه تعریف می شود، که معمولاً بدون ایجاد شکاف در پوست آن اتفاق می افتد. در سال ۲۰۰۰ میلادی طبق (USDA 2002)، در ایالات متحده آمریکا، با وجود تولید تخمینی سیب به ارزش یک میلیارد و ۳۲۶ میلیون دلار، تنها ۷۹۵ میلیون دلار آن سهم بازار مصرف بود، به عبارت دیگر، تنها ۶۰ درصد از کل ارزش سیب تولیدی، درآمد حاصل از فروش بود [۳].

در جامدات بیولوژیکی، پیدایش ابتدایی گسیختگی سلولی در بخش کوچکی از یک سیستم سلولی از نقطه تسلیم بیولوژیکی اتفاق می افتد. نقطه تسلیم در مواد بیولوژیکی، نقش مهمی را در تعیین حساسیت آن ها به آسیب های مکانیکی بازی می کند. از اینرو به منظور تخمین لهیدگی در این نوع سیستم های تماسی، نحوه توزیع فشار ناشی از تماس در سراسر ناحیه مشترک تماسی از اهمیت بیولوژیکی ویژه ای برخوردار است [۶-۷]. به همین دلیل در سال های اخیر، توجه گسترده ای به شبیه سازی تغییر شکل های غیر-الاستیک و مدل سازی غیرخطی فشار تماسی در تولیدات بیولوژیکی شده است.

کارهای تجربی قابل ملاحظه ای در خصوص بررسی آسیب مکانیکی لهیدگی وارد بر میوه ها هم از نظر استاتیکی و هم دینامیکی ارتعاشی به منظور مطالعه نحوه تشکیل لهیدگی انجام شده اند. به طور نمونه، استفاده از تست های فشاری یکی از مهمترین روش های تجربی مطالعه لهیدگی بر روی میوه سیب می باشد [۵-۸]. اکثر این مطالعات تجربی، با توجه به استفاده از آزمایشگاه های مجهز، دارای نتایج تقریبی قابل قبولی هستند. اگرچه کارهایی با مدل های شبیه سازی شده و تحلیل های عددی انجام شده است، ولی متأسفانه، تعداد کارهای تحلیل عددی که با تست های آزمایشگاهی تأیید شوند، قابل توجه نمی باشند. تحلیل تنش های تماسی ویسکوالاستیک در صنعت تولیدات باغی به وسیله روش های عددی به ارائه اولین طرح توسط رامسی و فریدلی^۲ [۹]، در دانشگاه دیویس کالیفرنیا برمی گردد. در این طرح، از رهیافت اجزای محدود دو بعدی استفاده شد و مسئله در شرایط شبه استاتیکی و با مدول برشی خطی و ضریب حجمی ثابت تحلیل شد. پس از آن، تلاش قابل ذکری در ارائه مدل و فرمول بندی عددی با رهیافت اجزای محدود در تحلیل مسائل تماسی در جامدات بیولوژیکی انجام نشد. لو و آبت^۳ [۱۰]، با استفاده از نرم افزار تجاری مارک^۴، تحت پیکربندی سیستم واقعی به مطالعه پاسخ گذرای سیب ها در مقابل تحریک ضربه پرداختند. سیب ها به صورت ماده مرکب الاستیک

1- Bruising

2- Rumsey and Fridley

3- Lu and Abbott

4- MARC Package

5- Chermg et al.

6- ANSYS Package

7- Soft bioyield probes

8- Lewis et al.

9- Ultrasonic technique

با تقارن محوری متشکل از پوست، بدنه اصلی و هسته مدل شدند. چرنگ و همکارانش^۵ [۱۱]، با استفاده از ترکیب رهیافت تحلیلی انرژی و مدل سازی عددی در نرم افزار اجزای محدود انسیس^۶، شاخص استحکام جدیدی برای میوه های الاستیک بیضی گون ارائه کردند. لو و همکارانش [۸]، با استفاده از نرم افزار اجزای محدود مارک، به تحلیل نحوه توزیع تنش تماسی حاصل از فشار پروب-های تسلیم نرم^۷ در تست فشاری بر روی میوه سیب پرداختند. اثر دازه های متفاوت پروب ها، ضخامت و مدول الاستیک آن ها بر نحوه توزیع فشار تماسی روی نمونه های مختلف میوه سیب بررسی شد. در این طرح، سیب به صورت یک ماده مرکب با دانه ویسکوالاستیک و پوسته الاستیک مدل شد. لوئیس و همکارانش^۸ [۵]، با استفاده از نرم افزار اجزای محدود انسیس و روش تجربی فراصوتی^۹ جدیدی به مطالعه و بررسی نحوه توزیع تنش های تماسی میوه سیب تحت بارگذاری استاتیکی پرداختند. سیب ها برای بررسی لهیدگی به صورت کاملاً سه بعدی و الاستیک مدل شدند. اشرفی و همکارانش [۷]، رهیافت اجزای محدود جدیدی را برای تحلیل لهیدگی ناشی از فشار تماس در میوه سیب ارائه کردند. در این طرح، سیب به صورت ویسکوالاستیک دوبعدی مدل شد. در سال های اخیر به دلیل این تنوع گسترده، تحلیل مسائل تماسی همراه با در نظر گرفتن تغییر شکل های بزرگ الاستیک و یا تغییر شکل های غیرالاستیک و در برگیرنده پاسخ های زمانی، انجام می شوند. از این روی، برای یک فرمول سازی مدرن در مکانیک محاسباتی باید تمامی این اثرات در نظر گرفته شوند و دیگر تحلیل های الاستیک، به تنهایی، جوابگوی یک تحلیل دقیق نیستند. در اغلب تحلیل های مهندسی از روش های عددی بهره گرفته می شود و اخه های متفاوتی را در علم مکانیک تماس محاسباتی، همانند اجزای محدود، اجزای مرزی و اجزای گسسته به منظور حل مسائل تماسی، می توان از یکدیگر متمایز کرد [۱]. به این دلیل که شرایط مرزی در ناحیه مشترک تماسی اجسام تغییر شکل پذیر به طور پیوسته با اعمال نیرو تغییر می کنند، تماس یک مسئله غیرخطی می باشد. علاوه بر این، مسائل تماسی در اجسام ویسکوالاستیک، هم تحت تأثیر خواص الاستیک و هم خواص ویسکوز می باشند. در نتیجه، هنگامی که حداقل یکی از پیکره های^۱ تماسی، یک ماده ویسکوالاستیک باشد، پیکربندی^۲ کلی تماس، ناحیه مشترک تماسی و نحوه توزیع تنش های تماسی همگی وابسته به زمان هستند و چنین مسائلی پیچیده تر می شوند. هدف اصلی این پژوهش، توسعه یک فرمول بندی مؤثر اجزای محدود با یک فرآیند محاسباتی وقتی و نمودی^۳ بر مبنای الگوریتمی توانمند به منظور محاسبه فشارهای تماسی به استاتیکی در جامدات بیولوژیکی ویسکوالاستیک می باشد. چگونگی رسیدن به این خواسته در بخش های زیر به طور کامل تفصیل می شود.

۱. مدل سازی معادلات متشکله^۴ در مواد ویسکوالاستیک

رفتار مکانیکی مواد با جرم مولکولی نسبتاً پایین بر حسب دو نوع ماده خاص ایده آل بحث می شوند: جامد الاستیک و سیال ویسکوز. جامدات دارای شکل مشخصی هستند و با اعمال نیروهای خارجی به شکل تعادلی جدیدی تغییر شکل می دهند و با برداشتن این بارها، آنها به شکل ابتدایی خود باز می گردند. سیالات ویسکوز دارای شکل مشخصی نیستند و با اعمال بار خارجی جاری می شوند. یکی از شاخصه های اساسی رفتار الاستیک، ظرفیت ذخیره سازی انرژی مکانیکی در هنگام تغییر شکل در اثر بارگذاری و آزادسازی کامل این انرژی بعد از باربرداری می اشد. بر خلاف این رفتار، در سیال ویسکوز، انرژی مکانیکی به صورت پیوسته و بدون ذخیره سازی مستهلک می شود. برخی از مواد پر اهمیت مهندسی، انرژی مکانیکی را در هنگام مواجه شدن با نیروهای اعمالی، به طور همزمان هم ذخیره می سازند و هم مستهلک می کنند. در واقعیت تمام مواد موجود در طبیعت، انرژی را در طی سیکل بارگذاری و باربرداری با درجات متفاوت ذخیره و مستهلک می ازند. چنین رفتاری، رفتار ویسکوالاستیک نامیده می شود. به طور ذاتی، معادلات متشکله رفتار ویسکوالاستیک نه تنها شامل تنش و کرنش خواهند بود، بلکه در آنها، آهنگ زمانی تغییرات تنش و کرنش نیز وجود خواهد داشت [۱۲].

مدل سازی رفتار متشکله جامدات ویسکوالاستیک در تماس با یکدیگر، با فرضیات ویسکوالاستیک خطی و ایزوتروپیک بودن انجام می شود. در حالت کلی، معادلات متشکله ویسکوالاستیک را به صورت زوج انتگرال های هردیتماری^۵ و بر حسب پاسخ های برشی (یا انحرافی)^۶ و حجمی (یا اتساعی)^۷ به فرم زیر می توان نشان داد [۱۲-۱۴]:

1- Body

2- Configuration

3- Incremental adaptive formulation

4- Constitutive equations

5- Hereditary integral

6- Distortional response

7- Dilatational response

8- Relaxation functions

9- Newtonian damper

$$s_{ij} = \int_{-\infty}^t G_1(t-\tau) \frac{de_{ij}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (1)$$

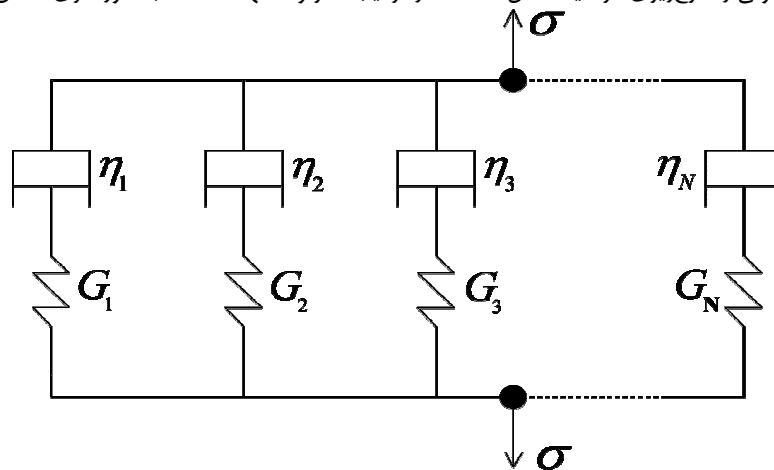
$$\sigma_{kk} = \int_{-\infty}^t G_2(t-\tau) \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (2)$$

که در آن ها:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (3)$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{ij} \varepsilon_{kk} \quad (4)$$

که در روابط فوق، G_1 و G_2 به ترتیب بیانگر توابع وارهدیگی^۱ مستقل ایزوتروپیک متناسب با رفتار برشی و حجمی می باشند. بر اساس ترکیب های مناسبی از دو المان اساسی بدون جرم، فنر خطی هوکین و مستهلک کننده نیوتنی^۲ می توان به سادگی مدل های ویسکوالاستیک متفاوتی را طرح ریزی کرد. یک مدل ساده که از ترکیب فنر و مستهلک کننده به طور سری حاصل می شود، مدل



شکل ۱: طرح کلی مدل تعمیم یافته ماکسول

ماکسول^۱ نامیده می شود. ولی یک ماده واقعی تنها با یک زمان وارهدیگی که با این مدل پیش بینی می شود، وارهدیده نمی شود. از اینرو برای بیان دقیق رفتار طبیعی یک ماده ویسکوالاستیک، باید تابع وارهدیگی را به صورت حاصل جمع یک سری عبارات نمایی کاهش یافته بیان کرد، که این خواسته منجر به شکل گیری مدل مکانیکی جامعی متشکل از المان های ماکسول به موازات هم می شود. چنین مدل جهانی شمولى که به طور شماتیک در شکل ۱ نشان داده شده است، به نام **مدل تعمیم یافته ماکسول^۲** یاد می شود. بنابراین، توابع وارهدیگی برای مدل تعمیم یافته ماکسول به صورت زیر بیان می شوند:

$$G_1(t) = \sum_{p=1}^N A_p \left(e^{-a_p t} \right) \quad (5)$$

$$G_2(t) = \sum_{p=1}^N B_p \left(e^{-b_p t} \right) \quad (6)$$

که در این روابط، (N) برابر با تعداد کل المان های ماکسول است، و همچنین (A_p) و (B_p) مدول های وارهدیگی متناظر با عکس زمان های آسایش (a_p) و (b_p) می باشند. در طی مشخصه وارهدیگی مواد ویسکوالاستیک، تحت تغییر شکل ثابت، تنش به طور پیوسته با زمان کاهش می یابد.

^۱- Maxwell model

^۲- Generalized Maxwell model

۲. فرآیند نموسازی^۱ در معادلات متشکله

برای مدل سازی رفتار ویسکوالاستیک در دامنه زمانی، ابتدا دامنه مورد نظر به فواصل زمانی گسسته (Δt) تقسیم می شود، به طوری که برای زمان حال ($t_{(n+1)} = t_{(n)} + \Delta t$) می باشد. با فرض دانستن وضعیت تنش در زمان ($t_{(n)}$)، وضعیت تنش در زمان ($t_{(n+1)}$) تعیین می شود. بنابراین، با جایگزینی معادله (۶) در معادله (۲)، تانسور کلی تنش حجمی در زمان ($t_{(n)}$)، به صورت زیر استخراج می شود:

$$\begin{aligned} \sigma_{kk}^{(n)} &= \int_0^{t_{(n)}} \langle G_2(t_{(n)} - \tau) \rangle \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau \\ &= \sum_{p=1}^N \left[\int_0^{t_{(n)}} \langle B_p e^{-b_p(t_{(n)} - \tau)} \rangle \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau \right] = \sum_{p=1}^N [\sigma_{kkp}^{(n)}] \end{aligned} \quad (7)$$

که در آن:

$$\sigma_{kkp}^{(n)} = \int_0^{t_{(n)}} \langle B_p e^{-b_p(t_{(n)} - \tau)} \rangle \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (8)$$

در این روابط، به عنوان تنش حجمی المان ماکسول (p) ام در لحظه ($t_{(n)}$)، مورد نظر قرار داده می شود. اگر تانسور کلی کرنش حجمی ($\varepsilon_{kk}^{(n)}$) در لحظه ($t_{(n)}$)، در طی فاصله زمانی [$t_{(n)}, t_{(n+1)}$] ثابت فرض شود، تنش کلی حجمی ($\bar{\sigma}_{kk}^{(n+1)}$) را که در طی بازه زمانی مذکور سیر تنزلی را طی می کند، به صورت رابطه زیر می توان نشان داد:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{kk}^{(n+1)} &= \int_0^{t_{(n+1)}} \langle G_2(t_{(n+1)} - \tau) \rangle \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau = \sum_{p=1}^N \left[\int_0^{t_{(n+1)}} \langle B_p e^{-b_p(t_{(n+1)} - \tau)} \rangle \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau \right] \\ &= \sum_{p=1}^N \left[\int_0^{t_{(n)}} \langle B_p e^{-b_p(t_{(n)} - \tau)} \rangle \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau \right] e^{-b_p(\Delta t)} + \sum_{p=1}^N \left[\int_{t_{(n)}}^{t_{(n+1)}} \langle B_p e^{-b_p(t_{(n+1)} - \tau)} \rangle \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau \right] \quad (9) \\ &= \sum_{p=1}^N \left[(e^{-b_p(\Delta t)}) \sigma_{kkp}^{(n)} \right] = \sum_{p=1}^N [\bar{\sigma}_{kkp}^{(n+1)}] \end{aligned}$$

که در این رابطه، ($\bar{\sigma}_{kkp}^{(n+1)}$) تانسور کلی تنش حجمی المان ماکسول (p) ام است که از تنش کلی حجمی المان ماکسول (p) ام در لحظه ($t_{(n)}$) در فاصله زمانی [$t_{(n)}, t_{(n+1)}$] تنزل می یابد. ذکر این نکته ضروری است که در طی این فاصله زمانی، مقدار مشتق ($d\varepsilon_{kk}(\tau)/d\tau$) برابر صفر می باشد.

به طور مشابه، تانسور کلی تنش انحرافی ($s_{ij}^{(n)}$) در لحظه ($t_{(n)}$) و تانسور کلی تنش انحرافی ($\bar{s}_{ij}^{(n+1)}$) که در فاصله زمانی [$t_{(n)}, t_{(n+1)}$]، روند کاهشی را از تانسور ($s_{ij}^{(n)}$) طی می کند، به صورت زیر بیان می شوند:

$$s_{ij}^{(n)} = \sum_{p=1}^N [s_{ijp}^{(n)}] \quad (10)$$

9

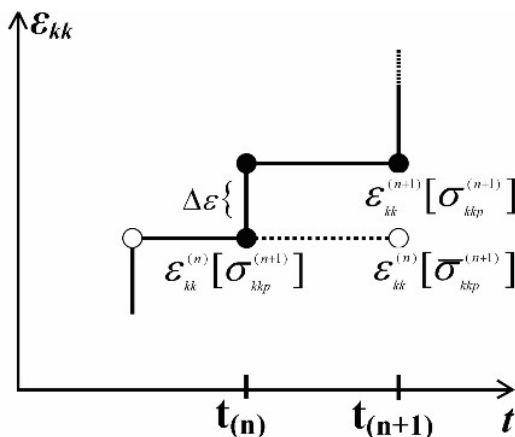
$$\bar{s}_{ij}^{(n+1)} = \sum_{p=1}^N \left[(e^{-a_p(\Delta t)}) s_{ijp}^{(n)} \right] = \sum_{p=1}^N [\bar{s}_{ijp}^{(n+1)}] \quad (11)$$

¹- Incrementalization procedure

که در آن:

$$s_{ijp}^{(n)} = \int_0^{t(n)} \left\langle A_p e^{-a_p(t(n)-\tau)} \right\rangle \frac{de_{ij}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (12)$$

حال همانطور که در شکل ۲ هم به صورت شماتیک نشان داده شده است، اگر کرنش نموی $(\Delta \varepsilon_{kk})$ در لحظه $(t(n))$ موجود باشد، بنابراین از معادلات ۲ و ۶ می توان تانسور تنش حجمی $(\sigma_{kk}^{(n+1)})$ را در لحظه $(t(n+1))$ به صورت زیر بیان کرد:



شکل ۲: طرح کلی فرایند نموسازی توابع وارهدگی معادلات متشکله

$$\begin{aligned} \sigma_{kk}^{(n+1)} &= \int_0^{t(n+1)} \left\langle G_2(t(n+1) - \tau) \right\rangle \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau = \sum_{p=1}^N \left[\int_0^{t(n+1)} \left\langle B_p e^{-b_p(t(n+1)-\tau)} \right\rangle \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau \right] \\ &= \sum_{p=1}^N \left[\int_0^{t(n)} \left\langle B_p e^{-b_p(t(n)-\tau)} \right\rangle \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau \right] e^{-b_p(\Delta t)} + \sum_{p=1}^N \left[\int_{t(n)}^{t(n+1)} \left\langle B_p e^{-b_p(t(n+1)-\tau)} \right\rangle \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau \right] \quad (13) \\ &= \sum_{p=1}^N [\bar{\sigma}_{kkp}^{(n+1)}] + \sum_{p=1}^N \left[\int_{t(n)}^{t(n+1)} \left\langle B_p e^{-b_p(t(n+1)-\tau)} \right\rangle \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau \right] \end{aligned}$$

به وسیله این فرایند وارهدگی نموی، کرنش کلی حجمی $(\varepsilon_{kk}^{(n)} + \Delta \varepsilon)$ در طی فاصله زمانی $[t(n), t(n+1)]$ ، ثابت فرض می شود و تاریخچه کرنش، همانطور که در شکل ۲ هم نشان داده شده است، به صورت عددی مدل سازی می شود. برای جزئیات بیشتر در مورد این فرایند نموی، می توان به منابع [۱۴-۱۶] مراجعه کرد. مجدداً، این نکته قابل ذکر است که مشتق $(d\varepsilon_{kk}(\tau)/d\tau)$ در طی این بازه زمانی، به استثنای زمان $(t(n))$ ، برابر صفر است. بنابراین، داریم:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=t(n)} &= \lim_{\tau \rightarrow t(n)} \left(\frac{\varepsilon_{kk}(\tau) - \varepsilon_{kk}(t(n))}{\tau - t(n)} \right) \\ &= \delta(\tau - t(n)) \Delta \varepsilon_{kk} \quad (14) \end{aligned}$$

که در این رابطه، $(\delta(\tau - t(n)))$ تابع دلتا می باشد. از اینرو معادله ۱۳ را با توجه به اصل فوق، می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \sigma_{kk}^{(n+1)} &\approx \sum_{p=1}^N [\bar{\sigma}_{kkp}^{(n+1)}] + \sum_{p=1}^N \left[\int_{t(n)}^{t(n+1)} \left\langle B_p e^{-b_p(t(n+1)-\tau)} \right\rangle \delta(\tau - t(n)) \Delta \varepsilon_{kk} d\tau \right] \\ &= \sum_{p=1}^N [\bar{\sigma}_{kkp}^{(n+1)}] + \sum_{p=1}^N \left[\left\langle B_p e^{-b_p(t(n+1)-t(n))} \right\rangle \Delta \varepsilon_{kk} \right] \quad (15) \\ &= \sum_{p=1}^N [\bar{\sigma}_{kkp}^{(n+1)} + (B_p e^{-b_p(\Delta t)}) \Delta \varepsilon_{kk}] = \sum_{p=1}^N [\sigma_{kkp}^{(n+1)}] \end{aligned}$$

کرنش $(\varepsilon_{kk}^{(n+1)})$ در لحظه $(t_{(n+1)})$ به صورت حاصل جمع کرنش ثابت $(\varepsilon_{kk}^{(n)})$ در فاصله زمانی $[t_{(n)}, t_{(n+1)}]$ و کرنش نوی $(\Delta\varepsilon_{kk})$ در لحظه $(t_{(n)})$ می‌اشد. به منظور مدل‌سازی پاسخ تاریخیچه زمانی یک جامد ویسکوالاستیک، تانسور کلی تنش حجمی المان ماکسول (p) ام در لحظه $(t_{(n+1)})$ را می‌توان به صورت حاصل جمع تنش حجمی کلی المان ماکسول (p) ام در لحظه $(t_{(n+1)})$ ناشی از اثر کرنش ثابت $(\varepsilon_{kk}^{(n)})$ و تنش حجمی نوی المان ماکسول (p) ام ناشی از اثر کرنش نوی $(\Delta\varepsilon_{kk})$ بیان کرد. بنابراین، با استفاده از مدل تعمیم یافته ماکسول، تنش کلی حجمی $(\sigma_{kk}^{(n+1)})$ در لحظه $(t_{(n+1)})$ به صورت حاصل جمع کل تنش‌های حجمی N المان ماکسول در لحظه $(t_{(n+1)})$ بیان می‌شود. به طور مشابه، برای تنش کلی انحرافی $(s_{ij}^{(n+1)})$ در لحظه $(t_{(n+1)})$ می‌توان رابطه زیر را بازنویسی کرد:

$$s_{ij}^{(n+1)} = \sum_{p=1}^N \left[\bar{s}_{ijp}^{(n+1)} + (A_p e^{-a_p(\Delta t)}) \Delta e_{ij} \right] = \sum_{p=1}^N \left[s_{ijp}^{(n+1)} \right] \quad (16)$$

در پایان این بخش، با استفاده از ترکیب معادلات ۳، ۴، ۱۵ و ۱۶، تانسور کلی تنش $(\sigma_{ij}^{(n+1)})$ در لحظه $(t_{(n+1)})$ را به فرم کلی زیر می‌توان بیان کرد:

$$\sigma_{ij}^{(n+1)} = C_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl} + f_{ij}^{(n)}(\Delta t) \quad (17)$$

که در آن:

$$\begin{cases} C_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl} = G_1(\Delta t) \Delta e_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} G_2(\Delta t) \Delta \varepsilon_{kk} \\ f_{ij}^{(n)}(\Delta t) = \sum_{p=1}^N s_{ijp}^{(n)} e^{-a_p(\Delta t)} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \sum_{p=1}^N \sigma_{kkp}^{(n)} e^{-b_p(\Delta t)} \end{cases} \quad (18)$$

به دلیل آنکه $(\frac{1}{3} \sigma_{kkp}^{(n)})$ و $(s_{ijp}^{(n)})$ ، به ترتیب بیانگر تنش میانگین و تنش انحرافی المان ماکسول (p) ام در لحظه $(t_{(n)})$ می‌باشند، در نتیجه $(f_{ij}^{(n)})$ بیانگر مجموع تنش‌های المانی است که در فاصله زمانی $[t_{(n)}, t_{(n+1)}]$ از تنش‌های در لحظه $(t_{(n)})$ سیر تنزلی را طی می‌کنند. از معادله نهایی ۱۷، برای تانسور کلی تنش در لحظه $(t_{(n+1)})$ چنین برمی‌آید که متشکل از دو بخش مجزا می‌باشد:

- i. بخشی که در طی فاصله مانی $[t_{(n)}, t_{(n+1)}]$ از تنش‌های در لحظه $(t_{(n)})$ روند تنزلی دارد.
- ii. بخشی که شامل تنش‌های نوی که در نتیجه کرنش نوی $(\Delta\varepsilon_{kl})$ در لحظه $(t_{(n)})$ می‌باشد.

۳. مدل‌سازی ناحیه مشترک تماسی

دو پیکره تغییر شکل پذیر، با اعمال نیروهای خارجی به یکدیگر فشرده می‌شوند و در معرض تماس اصطکاکی با یکدیگر قرار می‌گیرند (شکل ۳). دامنه هر دو پیکره در حال تماس، به تعداد مشخصی المان محدود گسسه می‌شود و از المان‌های چهار وجهی هشت‌گه‌ای در ساخت مدل اجزای محدود استفاده می‌شود [۱۷-۱۸]. برای تحلیل عددی تماس، مرزهای دو پیکره به سه دسته مرزهای تغییرشکلی مشخص، مرزهای تراکشنی مشخص^۱ و مرزهای تماسی مرتبط با نواحی مشترک تماس دو پیکره تقسیم بندی می‌شوند. با اعمال نیرو، شرایط مرزی در سراسر ناحیه مشترک تماسی به طور پیوسته تغییر می‌کند. وضعیت تماسی وابسته به زمان، وابسته به نوع بار اعمالی، هندسه و پذیرش نسبی مادی پیکره‌های تماسی می‌باشد. در شرایطی که بار اعمالی به آهستگی با زمان تغییر کند، ترم اینرسی قابل نظر کردن است و با یک مسئله شبه‌استاتیک مواجه می‌شویم. در چنین مسائلی، معادله تعادل و شرایط مرزی مرتبط به صورت زیر قابل بیان می‌باشند:

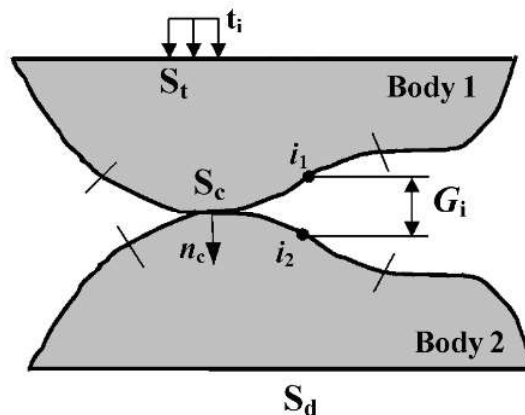
$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad (19)$$

$$\begin{cases} u_i = u'_i & (\text{in } S_d) \\ t_i = \sigma_{ij} n_j & (\text{in } S_t) \end{cases} \quad (20)$$

¹- Prescribed traction boundaries

که (b_i) نیروی تماسی در واحد حجم می‌باشد. رابطه اول معادله ۲۰، بیانگر شرایط مرزی مشخص تغییرشکلی و رابطه دیگر آن، بیانگر شرایط مرزی مشخص تراکشنی است. علاوه بر شرایط مرزی متداول که بیان شدند، شرایط مرزی تماسی نیز باید در ناحیه مشترک تماس دو پیکره، به سیستم تماسی مطابق زیر اعمال شوند:

$$\begin{cases} (\tilde{u}^1 - \tilde{u}^2) \tilde{n}_c - \tilde{G} \leq 0 & (\text{in } S_c) \\ \tilde{\sigma}_n \geq 0 \\ [(\tilde{u}^1 - \tilde{u}^2) \tilde{n}_c - \tilde{G}] \tilde{\sigma}_n = 0 \\ \alpha \tilde{\sigma}_n \geq \tilde{\sigma}_t \end{cases} \quad (21)$$



شکل ۳: پیکربندی تماس دو پیکره تغییرشکل پذیر

که در این رابطه (\tilde{G}) بردار شکاف فعلی^۱، (μ) ضریب اصطکاک، (σ_n) فشار تماسی یا ضریب لاگرانژ و (σ_t) مؤلفه مماسی تنش تماسی می‌باشد. برای مدل‌سازی ناحیه مشترک تماسی از طرح تماس گره به گره استفاده می‌شود. فرمول‌بندی‌های متعددی ممکن است به منظور قیدگذاری در ناحیه مشترک تماسی مورد استفاده قرار گیرند [۱-۲]. یکی از کاربردی‌ترین آن‌ها، فرمول‌بندی لاگرانژ الحاقی^۲ می‌باشد که در این تحقیق نیز مورد استفاده قرار گرفته شده است [۱۹]. این روش که تلفیقی از فرمول‌بندی‌های ضریب لاگرانژ^۳ و پنالتهی^۴ می‌باشد، بر مبنای یک به هنگام‌سازی تکرار شونده^۵ برای ضریب لاگرانژ در ترکیب با ترمی همانند پنالتهی مورد استفاده قرار می‌گیرد. از اینرو برای هر زوج گره تماسی، می‌توان عبارت تغییراتی زیر را بیان کرد:

$$\Pi = \lambda \tilde{G} + k \tilde{G}^2 \quad (22)$$

که (λ) ضریب لاگرانژ و (k) یک پارامتر پنالتهی است. معادله ماتریسی یک زوج تماسی را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} k & k \\ k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\tilde{u}_1 \\ d\tilde{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\lambda_{(n)} - k\tilde{G} \\ \lambda_{(n)} + k\tilde{G} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

که به هنگام‌سازی ضریب لاگرانژ با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\lambda_{(n+1)} = \lambda_{(n)} + k\tilde{G} \quad (24)$$

چنین به هنگام‌سازی را می‌توان با استفاده از روش نیوتن-رافسون^۶، پس از هر تکرار یا در یک حلقه تکرار اضافی محاسبه شود تا به یک نتیجه همگرا شود. برای کسب اطلاعات بیشتر می‌توان به منبع [۱۹] مراجعه کرد.

¹- Current gap vector

²- Augmented Lagrangian formulation (ALM)

³- Lagrange multiplier formulation (LMM)

4- Penalty formulation (PM)

5- Iterative update

6- Newton-Raphson procedure

۵. فرآیند حل

به منظور مدل سازی دامنه های مسئله مورد نظر، دامنه هر دو پیکره تماسی و هدف، به تعداد مشخصی (M_1, M_2) المان محدود $(j = 1, 2, \dots, M_1, M_1 + 1, \dots, M_1 + M_2)$ $[\Omega_j]$ گسسته می شود. به این دلیل که در مواد ویسکوالاستیک، کمیت های وضعیتی مانند خواص مادی، تنش ها و جابجایی ها تابع زمان می باشند، استفاده از یک فرآیند نموی سبب حصول نتایج مطلوبتری می شود. با صرف نظر کردن از نیروهای حجمی و با استفاده از اعمال اصل کار مجازی به معادله تعادل در لحظه $(t_{(n+1)})$ ، به رابطه زیر دست می یابیم:

$$\sum_{j=1}^{(M_1+M_2)} \left\{ \int_{\Omega_j} \{ \delta \Delta \varepsilon \}^t \{ \sigma^{(n+1)} \} d\Omega - \int_{S_{t_j}} \{ \delta \Delta u \}^t \{ \bar{t}^{(n)} + \Delta \bar{t} \} dS \right\} - \sum_{l=1}^L \left\{ \int_{S_{C_l}} \{ \delta \Delta \tilde{u}_1 - \delta \Delta \tilde{u}_2 \}^t \{ \hat{t}_c^{(n)} + \Delta \hat{t}_c \} dS \right\} = 0 \quad (25)$$

که در این رابطه $\{ \Delta u \}$ و $\{ \Delta \varepsilon \}$ ، بردارهای کرنش و جابجایی نموی از لحظه $(t_{(n)})$ تا لحظه $(t_{(n+1)})$ می باشد و (S_{C_l}) ، بخشی از سطح تماس مربوط به المان (l) می باشد و (L) برابر با تعداد کل المان های تماسی در سطح تماس است. با انجام برخی عملیات مهندسی به رابطه ماتریسی نهایی زیر می توان دست یافت:

$$\sum_{j=1}^{(M_1)} \left\{ \{ \delta \Delta q_1 \}^t [K_1] \{ \Delta q_1 \} - \{ \delta \Delta q_1 \}^t \left(\{ \bar{P}_1^{(n)} \} + \{ \Delta \bar{P}_1 \} + \{ F_1^{(n)} \} \right) \right\} - \sum_{j=1}^{(M_2)} \left\{ \{ \delta \Delta q_2 \}^t [K_2] \{ \Delta q_2 \} - \{ \delta \Delta q_2 \}^t \left(\{ \bar{P}_2^{(n)} \} + \{ \Delta \bar{P}_2 \} + \{ F_2^{(n)} \} \right) \right\} - \sum_{l=1}^L \left[\{ \delta \Delta \tilde{u}_1 - \delta \Delta \tilde{u}_2 \}^t \{ \hat{t}_c^{(n)} + \Delta \hat{t}_c \} \right] = 0 \quad (26)$$

که در این رابطه ماتریسی:

$$[K_\alpha] = \int_{\Omega_{\alpha j}} [B_\alpha]^t [C_\alpha] [B_\alpha] d\Omega$$

$$\{ \bar{P}_\alpha^{(n)} \} + \{ \Delta \bar{P}_\alpha \} = \int_{S_{t(\alpha j)}} [N_\alpha]^t \{ \bar{t}^{(n)} + \Delta \bar{t} \} dS \quad (27)$$

$$[F_\alpha^{(n)}] = \int_{\Omega_{\alpha j}} [B_\alpha]^t \{ f^{(n)}(\Delta t) \} d\Omega$$

معادله ۲۶ بیانگر معادلات نهایی جبری همزمان برای حل مسائل تماسی در جامدات ویسکوالاستیک می باشد. برای شرح جزئیات بیشتر در مورد نحوه رسیدن به این معادله می توان به منبع [۱۶] مراجعه کرد.

۴. نتایج تحلیل عددی و تجربی برای مدل نمونه (کاربرد)

فرمول بندی توسعه یافته مدل دوبعدی اجزای محدود غیرخطی و وابسته به زمان در تحلیل فشار تماسی موجود در سرتاسر ناحیه مشترک تماسی میوه سیب بکار برده می شود. میوه سیب به عنوان یک ماده ویسکوالاستیک خطی رفتار می کند. ضریب پواسون برابر مقدار ثابت $0/3$ انتخاب شد [۶]. خواص ویسکوالاستیک میوه سیب به وسیله آزمایش های تنش وارهیدگی بر روی 10 نمونه استوانه ای در آزمایشگاه آنالیز بافت دانشگاه شیراز به دست آورده شد [۶-۷ و ۲۰-۲۱]. نمونه های استوانه ای با قطر 13 میلی متر و ارتفاع 20 میلی متر از انواع سیب های گلدن^۱ انتخاب شدند. در ابتدا، نمونه ها با دستگاه تست اینسترون^۲ تحت یک بارگذاری ثابت تا کرنش 10 درصد فشرده شدند و سپس در این سطح کرنش ثبت تا 120 ثانیه وارهیده شدند. منحنی های تنش وارهیدگی این نمونه ها میانگین یابی شد و سپس مدل تعمیم یافته ماکسول به منحنی متوسط تنش وارهیدگی برازش یافت. در نهایت هم رفتار ویسکوالاستیک این نوع میوه های سیب به وسیله توابع وارهیدگی رشی و حجمی زیر مدل سازی شدند:

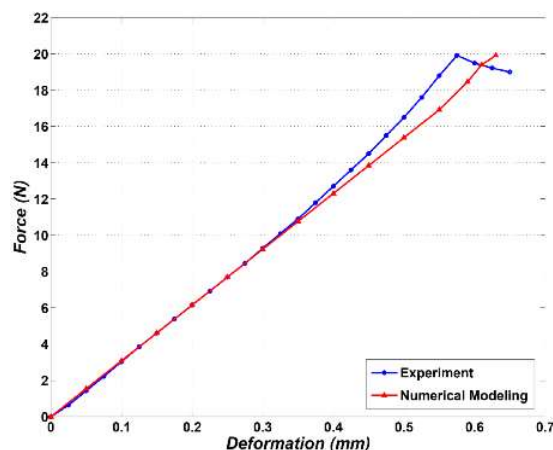
$$G_1(t) = 0.5 + 0.126 \exp(-0.333t) + 0.124 \exp(-0.025t) \quad (28)$$

¹- Golden delicious apple

²- Instron universal testing machine

$$G_2(t) = 1.34 + 1.028 \exp(-0.333t) + 0.432 \exp(-0.025t) \quad (29)$$

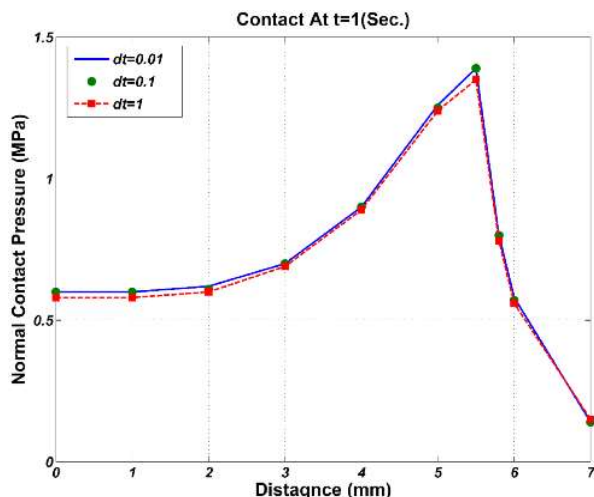
که در این رابطه (t) بیانگر زمان می باشد. برای شرح جزئیات کامل تری در مورد نحوه به دست آوردن این توابع برای میوه سیب به وسیله آزمایش های تنش وارهدگی می توان به منبع [۲۰] مراجعه کرد. در این تحلیل، ابتدا پاسخ مکانیکی تماس یک میوه سیب کروی کامل تحت آزمایش فشاری با صفحات استوانه ای دستگاه تست اینسترون بررسی شد. بار به وسیله صفحات مسطح دستگاه به نمونه اعمال می شود. این تحلیل به منظور تأیید فرمول بندی عددی با آزمایش فشاری در آزمایشگاه مورد نظر قرار گرفت. در مدل سازی عددی، سیب به صورت یک جسم متقارن محوری فرض شد تا مسئله از سه بعد به دو بعد کاهش یابد. در ادامه نیز نتایج تحلیل عددی نحوه توزیع فشار تماسی در تماس سیب با سیب، تحت ۲ میلی متر جابجایی شعاعی به وسیله این رهیافت اجزای محدود ارائه می شود.



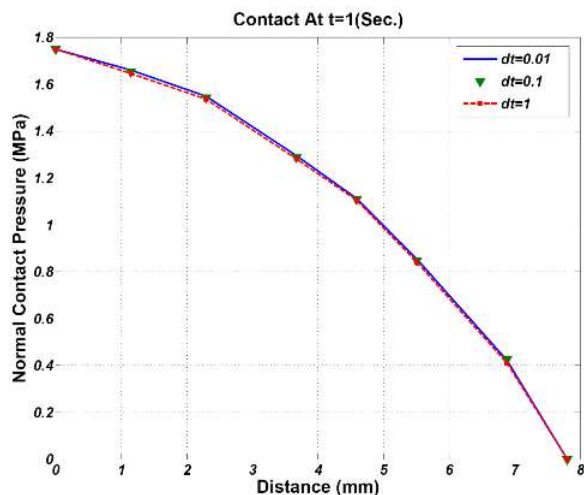
شکل ۴: منحنی نیرو-تغییر شکل مدل عددی و مدل تجربی

رابطه نیرو-تغییر شکل برای تعیین مدول الاستیسیته، نقطه تسلیم بیولوژیکی، نقطه گسیختگی و ضریب پواسون بکار برده می شود. در طی اندازه گیری های آزمایش فشاری باید مشخصه های وضعیتی ماده مورد نظر تغییر کنند. در شکل ۴، منحنی نیرو-تغییر شکل برای سیب های مورد تحلیل تحت آزمایش فشاری با یک نرخ جابجایی ثابت نشان داده شده است که با منحنی نیرو-تغییر شکل ناشی از حل غیرخطی فرمول بندی عددی توسعه یافته مقایسه شده است. همانطور که در این شکل هم مشاهده می شود، تفاوت اساسی بین این دو منحنی در ابتدا وجود ندارد، ولی با نزدیک شدن به نقطه تسلیم بیولوژیکی این اختلاف افزایش یافته است و در این نقطه به مقدار خطا ۸ درصدی رسیده است. شایان ذکر است که معمولاً تا حد تسلیم بیولوژیکی ماده، رفتار خطی بین نیرو و جابجایی دیده می شود، به همین دلیل است که مدول الاستیسیته جامدات الاستیک را در زیر این حد استخراج می کنند. رویهم رفته با توجه به اینکه تعیین رفتار واقعی جامدات بیولوژیکی به سبب رفتار متشکله و مشخصه های وضعیتی ویژه آنها بسیار دشوار است، فرمول بندی اجزای محدود ارائه شده، قابل تأیید است و برای مدل سازی پاسخ مکانیکی سایر مواد جامد بیولوژیکی تحت بارگذاری تماسی توصیه می شود.

در شکل ۵، نحوه توزیع تنش تماسی در ناحیه مشترک تماسی یک سیب با صفحات استوانه ای دستگاه تحت آزمایش فشاری و در فاصله های زمانی متفاوت نشان داده شده است. در تحلیل دیگری هم، در شکل ۶ نحوه توزیع تنش نرمال فشاری در تماس بین یک سیب با سیب مشابه خود تحت جابجایی شعاعی و در فاصله های زمانی متفاوت نشان داده شده است.



شکل ۵: توزیع تنش نرمال تماسی در ناحیه مشترک تماسی یک سیب با صفحات استوانه‌ای



شکل ۶: تحلیل عددی نحوه توزیع تنش نرمال تماسی در تماس سیب با سیب

نتیجه گیری

یک مدل محاسباتی نموداری اجزای محدود بر مبنای الگوریتمی توانمند به منظور محاسبه فشارهای به استاتیک و غیرخطی تماسی در جامدات بیولوژیکی ویسکوالاستیک توسعه داده شد. از مدل تعمیم یافته ماکسول برای مدل سازی رفتار جامدات ویسکوالاستیک بهره گرفته شد و بر اساس اصل کار مجازی، یک فرمول بندی مؤثر اجزای محدود با یک فرآیند وارهدگی نمودی در معادله متشکله ویسکوالاستیک حاصل شد. رهیافت نامهنویسی لاگرانژ الحاقی برای مدل سازی تماس در ناحیه مشترک فوق ه شد. در انتهای طرح نیز به عنوان یک نمونه کاربردی، فشار ناشی از تماس وارد بر میوه های سیب در آزمایش فشاری با رهیافت عددی ارائه شده، شبیه سازی شد و منحنی نیرو-جابجایی غیرخطی آن با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شد. فرمول بندی اجزای محدود به طور موفقیت آمیزی برای تحلیل تماس در میوه سیب بکار برده شد. با توجه به نتایج به دست آمده برای میوه سیب، فرمول بندی اجزای محدود ارائه شده، برای مدل سازی پاسخ مکانیکی سایر مواد جامد بیولوژیکی تحت بارگذاری تماسی توصیه می شود.

قدردانی

بر خود فرض می دانم که از راهنمایی ها و مطالب ارزشمند استاد ف. انام جناب آقای دکتر محزون (دانشگاه شیراز) و پروفیسور لو (دانشگاه ایالتی میشیگان) و دوست و همکار ارجمند جناب آقای مهندس معراجی کمال سپاسگزاری و قدردانی را داشته باشم.



مراجع

- [1] Wriggers, P. 2002. Computational Contact Mechanics. Chichester: John Wiley and Sons.
- [2] Laursen, T. 2002. Computational Contact and Impact Mechanics. Berlin: Springer.
- [3] Siyami, S. Brown, G.K. Burgess, G.J. Gerrish, J.B. Tennes, B.R. Burton, C.L. and Zapp, R.H. 1988. Apple impact bruise prediction models. Transactions of the ASAE, v(31/41): 1038-1046.
- [4] Pang, W. Studman, C.J. and Ward, G.T. 1992. Bruising damage in apple to apple impact. Journal of Agricultural Engineering Research, v(52): 229-240.
- [5] Lewis, R. Yoxall, A. Marshall, M.B. and Canty, L.A. 2008. Characterising pressure and bruising in apple fruit. Wear, v(264): 37-46.
- [6] Sitkei, G. 1986. Mechanics of Agricultural Materials. New York: Elsevier.
- [7] Ashrafi, H. Kasraei, M. and Farid, M. 2008. Modeling the viscoelastic contact pressure by nonlinear finite element formulation based on the incremental adaptive procedure. Proceedings of the CIGR International Conference of Agricultural Engineering, Brazil.
- [8] Lu, R. Srivastava, A.K. and Ababneh, H.A.A. 2006. Finite element analysis and experimental evaluation of bioyield probes for measure apple fruit firmness. Transactions of the ASABE, v(49/1): 123-131.
- [9] Rumsey, T.R. and Fridley, R.B. 1977. Analysis of viscoelastic contact stresses in agricultural products using finite element method. Transactions of the ASAE, v(20/1): 162-167.
- [10] Lu, R. and Abbott, J.A. 1997. Finite element modelling of transient responses of apples to impulse excitation. Transactions of the ASAE, v(40/5): 1395-1409.
- [11] Cherng, A.P. Ouyan, F. Blot, L. and Zwiiggelaar, R. 2005. An estimation of firmness for solid ellipsoidal fruits. Biosystems Engineering, v(91): 257-259.
- [12] Christensen, R.M. 1982. Theory of Viscoelasticity. New York: Academic Press, USA.
- [13] Mase, G.T. and Mase, G.E. 1999. Continuum Mechanics for Engineers. New York: CRC Press, USA.
- [14] Simo, J.C. and Hughes, T.J.R. 1998. Computational Inelasticity. New York: Springer.
- [15] Mahmoud, F.F. El-Shafei, A.G. and Mohamed, A.A. 2007. An incremental adaptive procedure for viscoelastic contact problems. ASME Journal of Tribology, v(129): 305-313.
- [16] Ashrafi, H. Kasraei, M. and Farid, M. 2008. Finite element formulation for viscoelastic contact problems with friction based on the generalized Maxwell model. Proceedings of 16th Annual International Conference on Mechanical Engineering (ISME 2008), Shahid Bahonar University of Kerman, Iran.
- [17] Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. 2000. The Finite Element Method: The Basis. London: Butterworth-Heinemann, UK.
- [18] Belytschko, T. Liu, W.K. and Moran, B. 2003. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. Chichester: John Wiley and Sons, UK.
- [19] Mijar, A.R. and Arora, J.S. 2004. An augmented Lagrangian optimization method for contact analysis problems. Struct. Multidisc. Optim., v(28): 99-112.
- [20] Segerlind, L.J. and De Baerdemaeker, J.G. 1976. Determination of the viscoelastic properties of apple flesh. Transactions of the ASAE, v(24): 346-353.
- [21] Lu, R. and Puri, V.M. 1992. Characterization of nonlinear behavior of apple flesh under stress relaxation. Journal of Rheology, v(36/2): 303-318.