

## مقایسه و ارزیابی دو مدل ریاضی فیزیکی و نتایج تجربی حرکت پرتابه‌ای قطرات آب خروجی از آب‌پاش‌های زراعی (۳۴۱)

مجیدرضا آیت‌اللهی<sup>۱</sup>، رضا آقازاده<sup>۲</sup>، رضا غفوری‌آهنگر<sup>۳</sup>

### چکیده

در این مقاله یک مدل ریاضی ساده شده بر اساس قانون پرتابه و یک روش تحلیلی (مدل ریاضی لورنزینی-Lorenzini) برای حرکت پرتابه‌ای قطرات آب خروجی از آب‌پاش‌های کشاورزی و صنعتی مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج به دست آمده در فشارهای مختلف و همچنین زوایای مختلف نازل خروجی با نتایج تست آزمایشگاهی مورد مقایسه قرار گرفته است. نتایج روابط و میزان دقت این مدل‌ها با نتایج تست به‌وسیله یک نمونه آب‌پاش مورد ارزیابی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهند که مدل ریاضی لورنزینی علاوه بر نیروی وزن، تاثیر نیروهای اصطکاک هوا و شناوری را به‌خوبی اعمال کرده و تصویر قابل‌قبولی از حرکت قطرات آب خروجی از نازل آب‌پاش نسبت به عمل را به دست می‌دهد.

**کلید واژه:** آب‌پاش، قانون پرتابه، مدل ریاضی لورنزینی، نیروی اصطکاک هوا، نیروی شناوری

۱- استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، پست الکترونیک: m.ayat@iust.ac.ir

۲- کارشناس مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران

۳- کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران

## ۱- مقدمه

آب‌پاش‌های کشاورزی و صنعتی نقش بسیار مهمی را در صنایع کشاورزی و تولید مواد غذایی ایفا می‌کنند. چنانچه کارکرد رست و دقیق آنها تاثیر بسزایی بر روی مقدار محصولات برداشت شده را به همراه دارد [۲،۱]. کشاورزی نیازمند آبیاری، حدود 40% غذای مورد نیاز را تولید می‌کند و 69% کل منابع آب شیرین را مصرف می‌کند (FAO, 2000) [۳]. دانستن تمام عوامل موثر بر جریان اسپری شده و افت از طریق تبخیر در آبیاری با آب‌پاش در بهبود راهکارهای مناسب حفاظت از آب مهم است. برای حل این مشکل، مطالعات عملی و نظری مناسب در نیمه دوم قرن اخیر صورت گرفته است. میزان تلفات تبخیر و راندگی از تفاضل بین آب خارج شده از آب‌پاش و آبی که به سطح خاک می‌رسد به دست می‌آید [۴].

از زمان کریستینسن (1984, Christiansens) و کارهای کلاسیک کنونی‌اش، مطالعات مهمی (نظری و عملی) برای تعیین جریان اسپری آب‌پاش و تلفات تحت شرایط جوی و عملی مختلف انجام شده است. اساساً دو راهکار (آماری و ریاضی فیزیکی) برای حل اتلاف جریان اسپری موجود است. در روش اول، تلفات تبخیر اندازه‌گیری شده به پارامترهای عملکردی و محیطی ارتباط داده می‌شود. راهکار دوم به مدلی متوسل می‌شود که معادله‌هایی را که تبخیر قطره آب را مشخص می‌کند به نظریه دینامیک ذره مربوط می‌کند.

در راهکار آماری، برهم‌کنش دو طرفه همه عوامل موثر بر مسیر هوایی و تلفات قطره آب (که ذکر چند مورد زیر حائز اهمیت است: اندازه قطره، دمای هوا، اصطکاک هوا، رطوبت نسبی، تابش خورشید، سرعت باد) که نازل آب‌پاش را ترک می‌کند کار بر وی تهیه یک توضیح مفصل و صحیح و ارزیابی پدیده را سخت می‌کند.

یازار<sup>۱</sup> در سال 1984 با آزمایش توسط لوازم جانبی آب‌پاش، این معادله را بدست آورد [۵]:

$$E = 0.389e^{(0.18w)} (e_s - e_a)^{0.7} \quad (1)$$

که در آن  $E$  درصد اتلاف جریان تخلیه شده به علت تبخیر بصورت % است،  $w$  سرعت باد با واحد  $\text{ms}^{-1}$  می‌باشد و  $e_s$  و  $e_a$  به ترتیب فشار بخار اشباع و فشار بخار واقعی هوا در واحد KPa می‌باشند. با در نظر گرفتن باد به عنوان تنها عامل موثر بر تلفات تبخیر در یک آزمایش با آب‌پاش یازار در سال 1984 معادله زیر را به دست آورد:

$$E = 1.68e^{0.29W} \quad (2)$$

تارچولو<sup>۲</sup> در سال 2000 یک سری تحقیقات تجربی برای تخمین تلفات تبخیر راندگی بوسیله باد در طول آبیاری با آب‌پاش انجام داد. نازل‌های آب‌پاش و ارتفاع بالا آمده مختلف مورد استفاده قرار گرفتند و تغییرات تبخیر و شرایط هوا در طول آزمایش اندازه‌گیری شدند که باعث شد محققین مدل آماری زیر را برای پیش‌بینی تلفات آب در کارکرد آب‌پاش تعریف کنند [۴]:

$$L = qp + C_2(e_s - as_a)^{0.5} + C_3w + e \quad (3)$$

که در آن  $L$  تلفات راندگی و تبخیر برحسب % و  $C_1, C_2, C_3$  ضرایب پسرقت و  $e$  خطای آزمایش می‌باشند. مدل ابزار مفیدی برای تعیین زمان‌بندی آبیاری بصورت یک تابع از شرایط عملکردی و محیطی می‌باشد تا تلفات راندگی و تبخیر را کاهش دهد. در راهکار ریاضی فیزیکی، یک مدل ریاضی اثبات شده می‌تواند یک ابزار تحقیق و مهندسی با ارزش باشد. کینزر و گان<sup>۳</sup> در سال 1951 بر اساس انتقال جرم و حرارت و ناچیز در نظر گرفتن اثرهای دینامیکی بر قطره به معادله زیر دست یافتند [۶]:

<sup>۱</sup>- Yazar

<sup>۲</sup>- Tarjuelo et al.

<sup>۳</sup>- Kinzer and Gunn

$$\frac{dm}{dt} = 4\pi a^2 K \left( \frac{d\rho_v}{dR} \right)_a \quad (4)$$

که در آن  $m$  جرم قطره بر حسب  $\text{kg}$ ، شعاع خارجی قطره با واحد  $\text{m}$ ،  $K$  پخش پذیری بخار در هوا با واحد  $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ،  $\left( \frac{d\rho_v}{dR} \right)_a$  گرادیان چگالی بخار هوا در سطح قطره بر حسب  $\text{kgm}^{-4}$ ،  $\rho_v$  چگالی بخار با واحد  $\text{kgm}^{-3}$  و  $R$  مولفه شعاعی با واحد  $\text{m}$  می‌باشد. گورینگ<sup>1</sup> در سال 1972 به معادله زیر برای محاسبه تغییر در قطر قطره  $D$  به علت تبخیر، بر اساس قیاس انتقال جرم و حرارت رسید [7]:

$$\frac{dD}{dt} = -2 \left( \frac{M_v}{M_m} \right) \left( \frac{K}{D} \right) \left( \frac{\rho}{\rho_d} \right) \left( \frac{\Delta P}{P_f} \right) Nu' \quad (5)$$

که در آن  $M_v$  وزن مولکولی بخار بر حسب  $\text{g}$ ،  $M_m$  وزن مولکولی هوا با واحد  $\text{g}$ ،  $K$  پخش پذیری بخار در هوا بر حسب  $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ،  $\rho$  چگالی هوا با واحد  $\text{kgm}^{-3}$ ،  $\rho_d$  چگالی قطره بر حسب  $\text{kgm}^{-3}$ ،  $\Delta P$  اختلاف بین فشار اشباع در دمای حباب تر هوا و فشار بخار در دمای حباب خشک بر حسب  $\text{Pa}$ ،  $P_f$  فشار جزئی هوا با واحد  $\text{Pa}$ ،  $Nu'$  که به صورت خاص تعریف می‌شود عدد نوسلت برای انتقال حرارت می‌باشد.

## ۲- مواد و روش‌ها

برای مطالعه مسیر هوایی قطره‌های آب دو معادله حرکت پرتابه‌ای در خلا و مدل لورنزینی مورد بررسی قرار گرفته است. در معادله دوم بر خلاف اولی اثر اصطکاک هوا و نیروی شناوری نیز وارد شده است.

### ۲-۱- معادله پرتابه

معادله پرتابه حرکت یک جسم با یک سرعت یه و زاویه پرتاب نسبت به زمین را در خلا بررسی می‌کند. در این معادله اصطکاک هوا و نیروی شناوری که به دلیل جرم کم قطره آب دو فاکتور تاثیرگذار بر حرکت قطره‌های آب خروجی از نازل آب‌پاش می‌باشند، در نظر گرفته نشده‌اند. طبق این معادله داریم:

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g} \quad (6)$$

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{2g} \quad (7)$$

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \varphi + h \quad (8)$$

در روابط بالا،  $R$  برد آب‌پاش،  $H$  ارتفاع اوج آب،  $y$  ارتفاع آب در لحظه  $t$  بعد از خروج از نازل آب‌پاش بر حسب  $\text{m}$ ،  $v_0$  سرعت اولیه قطره هنگام خروج از نازل آب‌پاش با واحد  $\text{ms}^{-1}$  و  $\varphi$  زاویه نازل نسبت به زمین می‌باشند.

### ۲-۲- مدل ریاضی لورنزینی

حرکت یک قطره از نازل آب‌پاش به زمین بوسیله اصل دوم دینامیک شرح داده می‌شود:

$\vec{F} = m\vec{a}$  که در آن  $\vec{F}$  نیروی کل در واحد  $\text{N}$  است که بر قطره عمل می‌کند و جمع برداری وزن قطره  $m$  بر حسب  $\text{kg}$  منهای نیروی شنوری و نیروی اصطکاک که در طول مسیر روی قطره با شتاب  $\vec{a}$  با واحد  $\text{ms}^{-2}$  عمل می‌کند، می‌باشد. ضریب اصطکاک  $f$  استفاده شده در مدل همان است که بوسیله بیرد<sup>2</sup> تعریف شده است. برای جریان سیال محاصره کننده قطره داریم:

<sup>4</sup>- Goering et al.  
<sup>1</sup>- Fanning (Bird et al. 1960)

الف) برای اعداد رینولدز  $Re < 0.1$  :  $f = 24 / Re$

ب) برای  $0.1 < Re < 500$  :  $f = 18.5 / Re^{0.6}$

ج) برای  $500 < Re < 200000$  :  $f = 0.44$

مورد الف) قانون جریان ام استوکسی را بیان می‌کند و مورد ب) درباره قانون جریان میانی و مورد ج) قانون جریان مغشوش نیوتن است.

مورد الف)، بصورت آماری، کمتر در عمل آبراری آب‌پاش در سرعت جریان معمولی اتفاق می‌افتد، برای قطر قطره از اندازه  $0.1 \text{ mm}$  ممکن است به ار رود که نوعاً در ابزارهای اسپری شیمیایی اتفاق می‌افتد تا با آبیاری معمولی.

برای رسیدن به مدل ریاضی مناسب برای حرکت قطره‌های خروجی از نازل آب‌پاش با فرضیات زیر شروع می‌کنیم: سیستم فیزیکی مورد نظر یک قطره است که دقیقاً مطابق خروجی نازل تولید می‌شود و نیروی وارده بر سیستم عبارتند از وزن، شناوری و اصطکاک. قطره شکل کروی دارد، حجم قطره در طول مسیر ثابت است، اصطکاک همان امتداد سرعت قطره را دارد ولی در جهت مخالف آن.

پارامترهایی که باید معرفی گردند عبارتند از ارتفاع نازل  $h$  نسبت به سطح زمین، سرعت قطره  $v$  و زاویه  $\alpha$  نسبت به سطح افق جت.

اگر  $n$  جرم قطره برای محاسبه جزء شناوری باشد و پارامتر  $k$  برحسب  $\text{kgm}^{-1}$  (که به وسیله  $k = f\rho A/2$  که در آن  $\rho$  چگالی هوا، وابسته به دما،  $A$  سطح مقطع قطره بر حسب  $\text{m}^2$  است، داده می‌شود) ضریبی است که عمل نیروی اصطکاک را تعریف می‌کند، دله‌های نهایی در جهت‌های افقی و عمودی به  $t$  می‌آیند:

$$m\ddot{x} = -k\dot{x}^2 \quad (9)$$

$$m\ddot{y} = -k\dot{y}^2 - ng \quad (10)$$

که در آن  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  و  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{y}$  نیز سرعت‌ها بر حسب  $ms^{-1}$  و شتاب‌ها بر حسب  $ms^{-2}$  به ترتیب در جهت‌های افقی و عمودی هستند. شرایط اولیه عبارتند از:

$$x(t=0) = 0 \quad (11)$$

$$\dot{x}(t=0) = v_{0x} \quad (12)$$

برای معادله اول و

$$y(t=0) = h \quad (13)$$

$$\dot{y}(t=0) = v_{0y} \quad (14)$$

برای دومی می‌باشد و در آن  $t$  زمان،  $v_{0x}$ ،  $v_{0y}$  به ترتیب بیانگر مولفه‌های سرعت افقی و عمودی بر حسب  $ms^{-1}$  هستند، در ورودی  $h$  ارتفاع نازل از سطح زمین با واحد  $m$  است [۸]. با انتگرال‌گیری از دستگاه معادله‌های دیفرانسیل حل تحلیلی کامل مسئله به فرم معادله‌های پارامتری موقعیت  $(x(t), y(t))$ ، سرعت  $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$  و زمان حرکت (معادله‌های لورنزی) را بدست می‌آوریم:

$$x(t) = \frac{m}{k} \ln\left(\frac{v_{0x}k}{m}t + 1\right) \quad (15)$$

$$y(t) = h - \frac{m}{k} \ln \frac{\cos(\arctan \frac{\sqrt{k/m}v_{0y}}{\sqrt{n/mg}})}{\cos(\arctan \frac{\sqrt{k/m}v_{0y}}{\sqrt{n/mg}} - t \frac{\sqrt{kng}}{m})} \quad (16)$$

$$\dot{x}(t) = \frac{mv_{0x}}{m + kv_{0x}t} \quad (17)$$

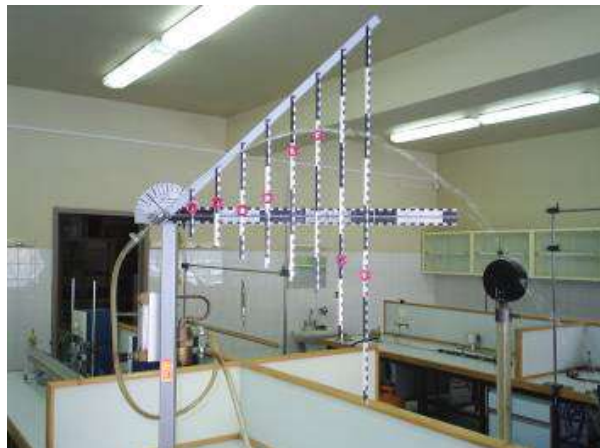
$$\dot{y}(t) = -\sqrt{\frac{ng}{k}} \tan \left[ -\frac{\sqrt{ngk}}{m}t + \arctan \left( \sqrt{\frac{k}{ng}}v_{0y} \right) \right] \quad (18)$$

$$\frac{m\sqrt{gkn} \operatorname{arcsec} \left[ e^{hk/m} \sqrt{1 + \frac{kv_{0y}^2}{gn}} \right] + m\sqrt{gkn} \arctan \left[ \frac{\sqrt{k/m}v_{0y}}{\sqrt{gn/m}} \right]}{gkn} \quad (19)$$

که  $\tau$  زمان حرکت قطره از زمان خروج از نازل تا رسیدن به سطح خاک می‌باشد [۹].

### ۳- نتایج و بحث

برای درستی‌سنجی مدل دینامیکی آزمایش‌هایی صورت گرفت و نتایج آن با مقادیر واقعی مورد مقایسه قرار گرفت. بدین منظور یک دستگاه آب‌پاش با زاویه پاشش قابل تغییر و نیز یک مدل آب‌پاش ضربه‌ای مورد استفاده قرار گرفت (شکل ۱).



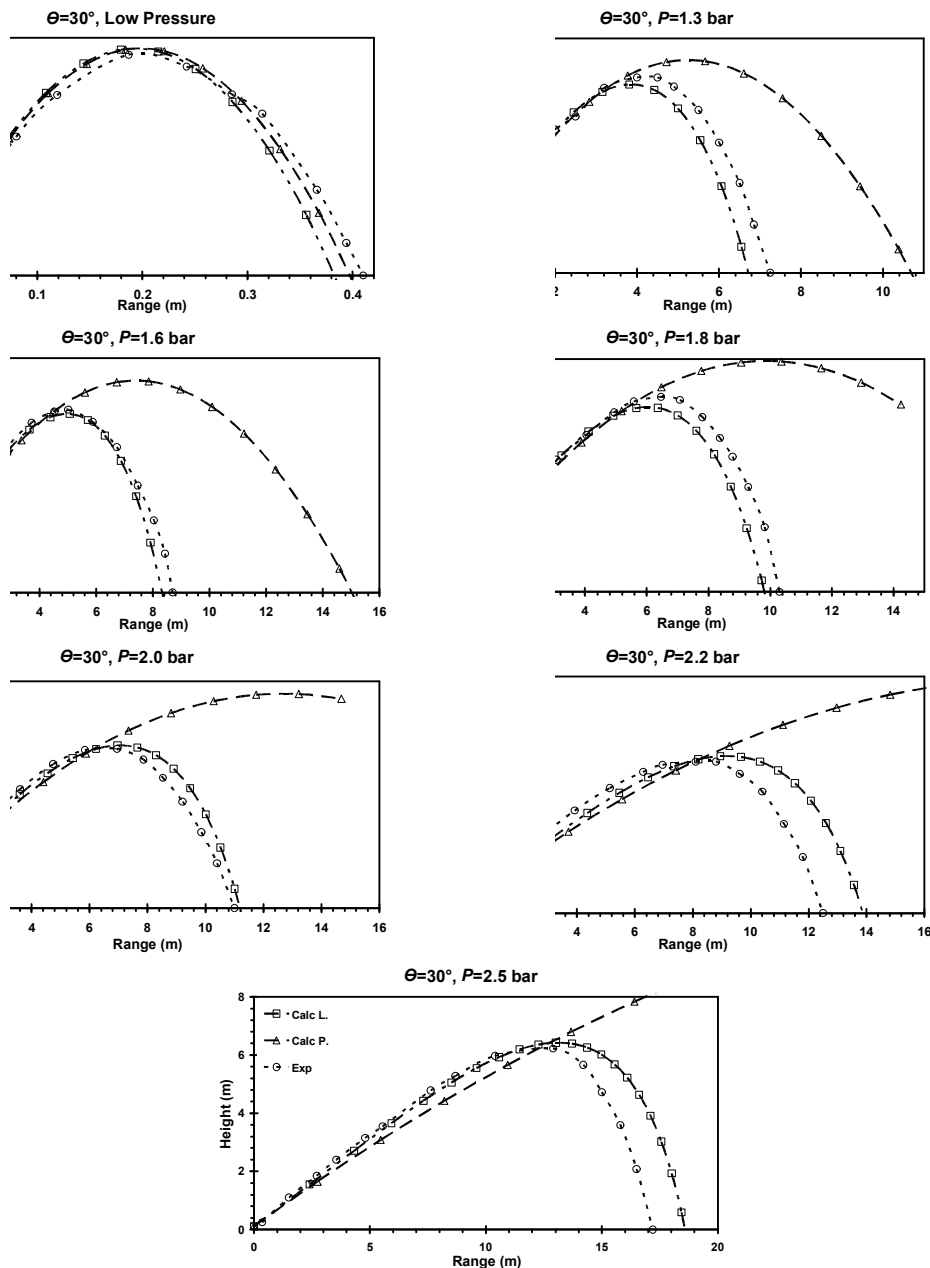
شکل ۱- دستگاه آبپاش با زاویه پاشش قابل تغییر

مشخصات آبپاش مورد آزمایش به شرح زیر می باشد:

قطر نازل = 4 mm

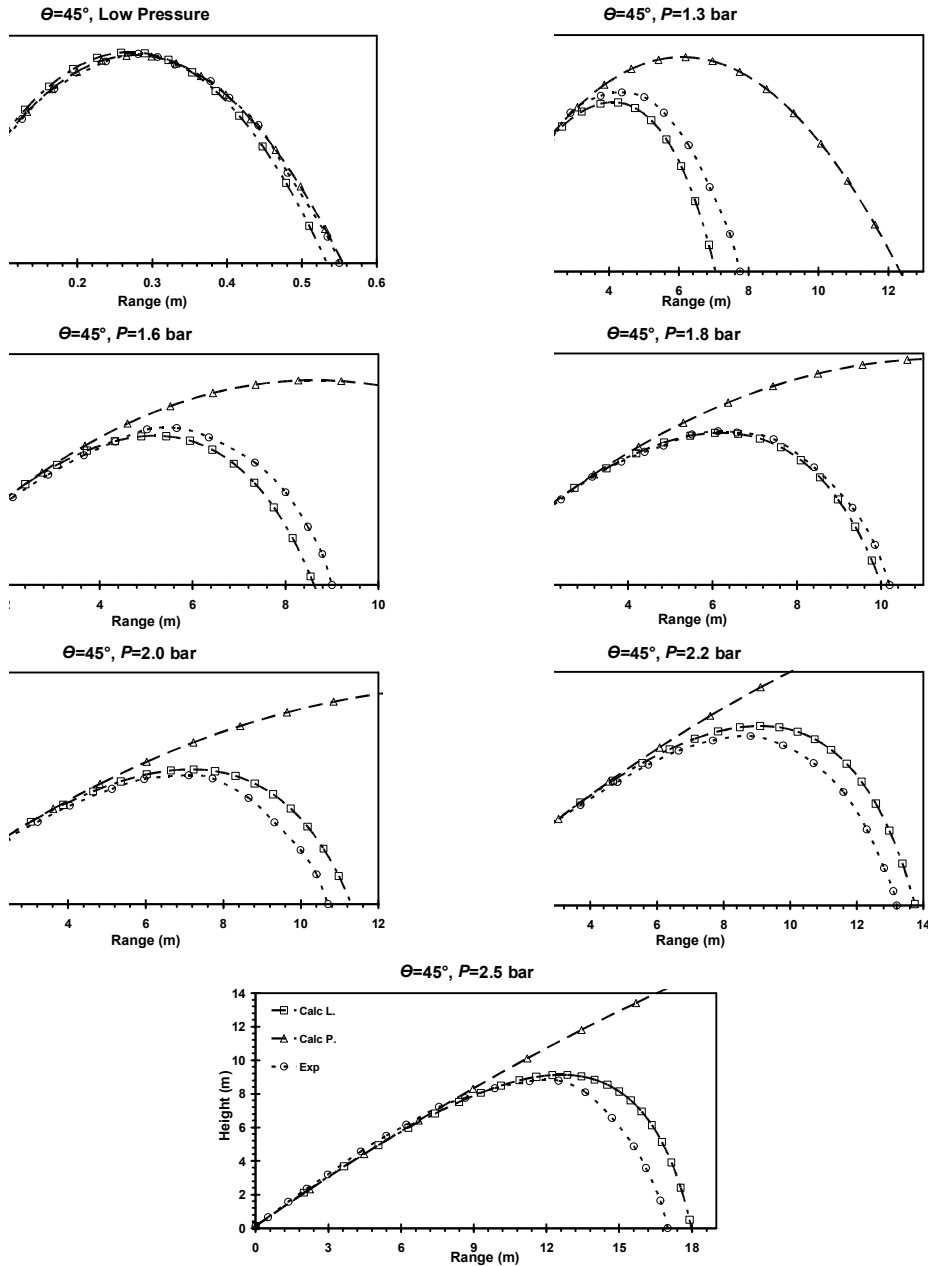
ارتفاع نازل (h) = 12 cm

آزمایش ها در شرایط جوی بدون باد و دمای  $25^{\circ}\text{C}$  انجام شده است. در شکل های ۲ تا ۴، نتایج مسیر حرکت آب از آبپاش به ازای فشارهای مختلف بین حدود 1 تا 2.5 bar در نمودارهای مختلف رسم گردیده است. نتایج برای تست آزمایشگاهی، معادله پرتابه (Calc P.) و معادله های لورنتزینی (Calc L.) مقایسه شده است. در شکل ۲، نمودارها برای زاویه نازل خروجی  $30^{\circ}$  ارائه گردیده است.



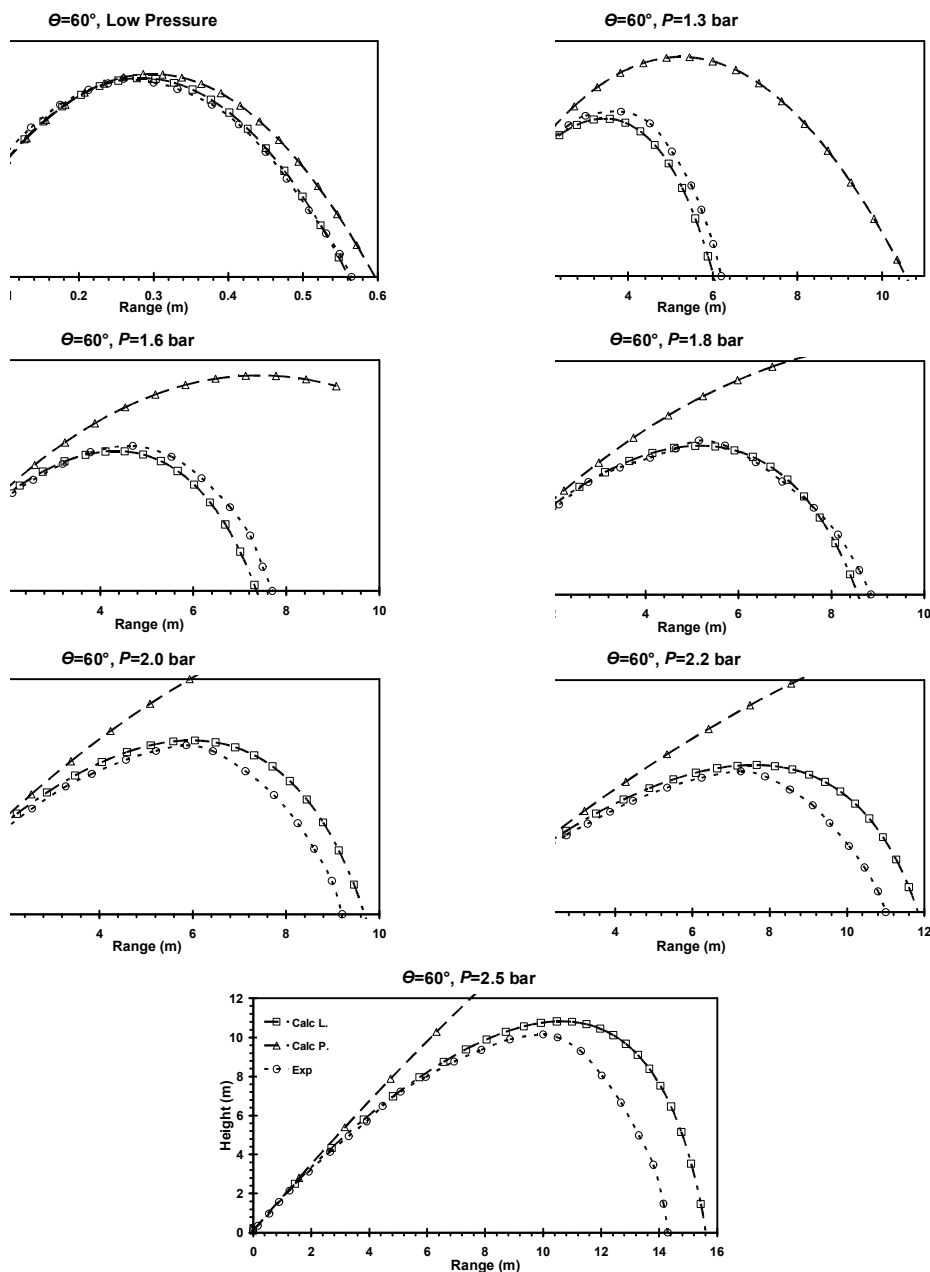
شکل ۲- مقایسه مسیر حرکت قطره های آب به صورت تجربی (Exp) و معادله های پرتابه (Calc P.) و (Calc L.) Lorenzini برای  $\theta = 30^\circ$

در شکل ۳، نمودارها برای زاویه نازل خروجی  $45^\circ$  و در شکل ۴، نمودارها برای زاویه نازل خروجی  $60^\circ$  ارائه گردیده است. در این نمودارها مشاهده می شود که در فشار کم، نتایج تست آزمایشگاهی، معادله پرتابه (Calc P.) و معادله های لورنزینی (Calc L.) اختلاف ناچیزی دارند. برای فشار 1.3bar نتایج معادله پرتابه از نتایج آزمایشگاهی اختلاف زیادی پیدا می کند. در صورتی که نتایج معادله لورنزینی دارای اختلاف بسیار کمی می باشد. در فشارهای بالا نتایج معادله پرتابه دیگر قابل مقایسه نیستند. در صورتی که نتایج لورنزینی در محدوده قابل قبولی وجود دارد.



شکل ۳- مقایسه مسیر حرکت قطره های آب به صورت تجربی (Exp) و معادله های پرتابه (Calc P.) و Lorenzini (Calc L.) برای  $\theta = 45^\circ$



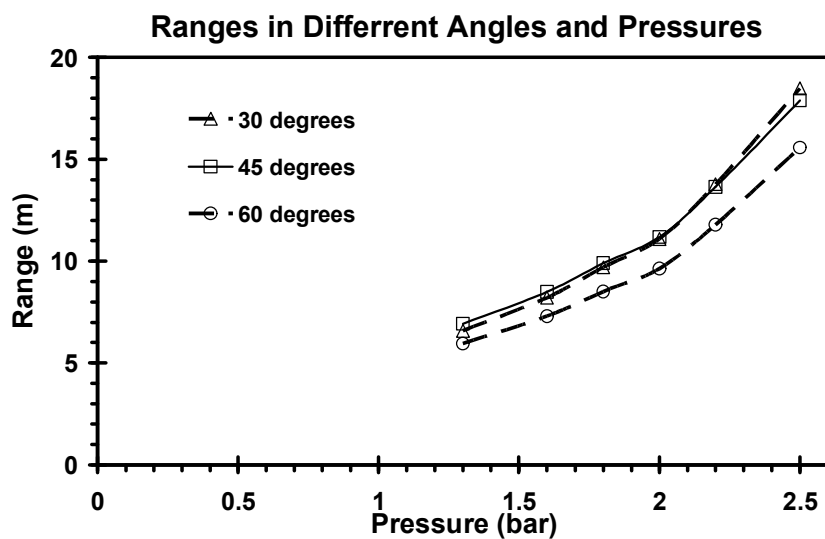


شکل ۴- مقایسه مسیر حرکت قطره‌های آب به صورت تجربی (Exp) و معادله‌های پرتابه (Calc P.) و (Calc L.) Lorenzini برای  $\theta = 60^\circ$

درصد خطا برای هر دو معادله لورنزینی و پرتابه در جدول ۱ آمده است [۱۰]. در نمودار شکل ۵، نمودار فشار-برد نشان داده شده است. این نمودار از داده‌های به دست آمده از معادله لورنزینی رسم شده است. در این نمودار مشاهده می‌شود که بر خلاف معادله پرتابه که مقدار برد در یک فشار خاص در دو زاویه ۳۰ و ۶۰ یک مقدار دارند، در عمل اینگونه نمی‌باشد و زاویه ۳۰ دارای برد بیشتری می‌باشد. همینطور مشاهده می‌شود که در زاویه ۴۵ بیشترین برد برای فشارهای پایین می‌باشد و با افزایش فشار، چنانچه زاویه نازل کاهش یابد برد نیز افزایش می‌یابد.

جدول ۱- درصد خطا برای معادله های Lorenzini و پرتابه در مدل سازی حرکت قطره های آب

Percentage of error for Lorenzini & Projectile equations								
Pressure (bar)	Angle (degrees)	Low P.	1.3 bar	1.6 bar	1.8 bar	2.0 bar	2.2 bar	2.5 bar
		30	-6.1	-9.2	-5.6	-5.8		
	45	-2.2	-10.7	-5.7	-2.9			
	60	-0.9	-4	-5.2	-3.8			
2.5	30	-2.4	46.9	71.8	93.2			
	45	0.9	58.7	92.8	127.4			
	60	4.4	71.8	94.2	124.9			



شکل ۵- معادله بین برد آب پاش و فشار در زوایای مختلف بر اساس معادله Lorenzini

۴- نتیجه گیری و پیشنهادها

یک مدل ریاضی ساده شده بر اساس یک روش تحلیلی و قانون پرتابه برای اجسام در خلا برای حرکت پرتابه‌ای قطرات آب خروجی از آب‌پاش مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین میزان دقت این مدل‌ها با آزمایش به‌وسیله یک نمونه آب‌پاش و به‌دست آوردن نتایج واقعی مورد ارزیابی قرار گرفته است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهند که:

در فشارهای کمتر هر دو معادله پرتابه و لورنزینی نتایج قابل قبولی را به دست می‌دهند. در فشارهای کاری بالاتر (بالاتر از 1 bar که فشار معمول در کارکرد آب‌پاش‌ها می‌باشد) معادله پرتابه به دلیل عدم در نظر گرفتن اصطکاک هوا و نیروی شناوری به هیچ‌وجه مناسب نیست. ولی در این فضا نتایج معادله لورنزینی به نتایج واقعی نزدیک است. در فشارهای بالا برد واقعی از برد محاسبه شده توسط مدل لورنزینی کمتر است. چون با طولانی شدن مسیر حرکت قطره‌های بزرگ‌تر به قطره‌های با قطر کوچک‌تر تبدیل می‌گردند و تاثیر اصطکاک هوا بر این قطره‌ها بیشتر است.

زوایه‌های نازل خروجی آب‌پاش 30° و 60° در عمل با شرایط آبیاری یکسان دارای برد یکسان نمی‌باشند و زاویه 30° دارای برد بیشتری می‌باشد. با صرف نظر از اصطکاک هوا، همواره زاویه 45° دارای بیشترین برد می‌باشد. اما مشاهده شده است که در فشارهای بالاتر، با وجود اصطکاک زوایای کمتر از 45° دارای بیشترین برد می‌باشد.

یک مدل مناسب برای حرکت پرتابه‌ای قطرات آب در ارزیابی سیستم آبیاری و گسترش راهکارهای حفظ منابع آب بسیار مؤثر است. بدین منظور نیاز به دانستن تمام عوامل مؤثر بر مسیر هوایی قطره‌های آب و تلفات تبخیر می‌باشد.

#### مراجع

- ۱- غفوری‌آهنگر، ر.، صفربورخالدی، م. ر. ۱۳۸۵. طراحی و ساخت آب‌پاش زراعی مکانیکی با قابلیت آبیاری سطوح مربعی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد ساری.
- 2- Al-Jamal, M.S., Ball, S., Sammis, T.W., 2001. Comparison of sprinkler, trickle and furrow irrigation efficiencies for onion production, *Agricultural Water Management* 46, USA, Sec 264:266.
- 3- Akram Kahlowan, M., Raoof, A., Zubair, M., Doral Kemper, W., 2006. Water use efficiency and economic feasibility of growing rice and wheat with sprinkler irrigation in the Indus Basin of Pakistan, *Agricultural Water Management* 87, Sec 292:293.
- 4- Tarjuelo, J.M., Ortega, J. F., Montero, J., de Juan, J.A., 2000. Modelling evaporation and drift losses in irrigation with medium size impact sprinklers under semi-arid conditions, *Agricultural Water Management* 43, Spain, Pages 263-284.
- 5- Yazar, A., 1984. Evaporation and drift losses from sprinkler irrigation systems under various operating conditions, *Agricultural Water Management* 8, pages 439-449.
- 6- Kinzer, G.D., Gunn, R., 1951. The evaporation, temperature and thermal relaxation-time of freely falling waterdrops, *Journal of Meteorology* 8(2), Pages 71-83.
- 7- Goering, C.E., Bode, L.E., Gebhard, M.R., 1972. Mathematical modeling of spray droplet deceleration and evaporation, *Transactions of the ASAE* 15(2), Pages 220-225.
- 8- De Wrachien, D., Lorenzini, G., 2006. Modeling Jet Flow and Losses in Sprinkler Irrigation: Overview and Perspective of a New Approach, *Biosystems Engineering* 94, Sec 297:309.
- 9- Lorenzini, G., 2004. Simplified Modelling of Sprinkler Droplet Dynamics, *Biosystems Engineering* 87, Sec 1:11.
- ۱۰- آیت‌اللهی، م.ر.، آقازاده، ر. ۱۳۸۶. طراحی و ساخت آب‌پاش زراعی مکانیکی با مکانیزم ضربه‌ای برای آبیاری سطوح چند ضلعی، دانشگاه علم و صنعت ایران.