



یازدهمین کنگره ملی مهندسی مکانیک بیوسیستم و مکانیزاسیون ایران



مدل سازی رفتار مکانیکی میکروتوبولها (ریزلولهها) در سلول های زنده با استفاده از تئوری پوسته برشی مرتبه اول غیرمحملی

معین کمالی^{۱*}، محسن شمس^۱، علیرضا سعیدی^۱، زهرا کرمی^۲

۱- دانشگاه شهید باهنر کرمان، دانشکده کشاورزی، بخش مهندسی مکانیک بیوسیستم

۲- دانشگاه شهید باهنر کرمان، دانشکده فنی، بخش مهندسی مکانیک

۳- دانشگاه شهید باهنر کرمان، دانشکده علوم پایه، گروه زیست شناسی

چکیده

برای طراحی مدرن ماشینهای کشاورزی، به منظور جلوگیری از آسیبهای سلولی و بافتی به گیاهان و محصولات کشاورزی، نیازمند آن هستیم که رفتار مکانیکی سلولها را مورد بررسی قرار دهیم. بدین منظور رفتار مکانیکی میکروتوبولها (ریزلولهها) که اصلیترین واحد مقاومت مکانیکی دیوارههای سلولی میباشند و دارای قطرهایی در ابعاد نانومتر و طولهایی در ابعاد میکرومتر میباشند، مورد بررسی قرار میگیرد. با توجه به ابعاد آنها، برای مدل سازی رفتار مکانیکی آنها نیازمند استفاده از تئوریهای جدید حاکم بر رفتار ریز ساختارها، میباشیم. در این مقاله، رفتار کمانشی میکروتوبولهای (MTs) پروتئینی تحت نیروهای محوری در یک سلول زنده، با استفاده از نظریه الاستیسیته غیر محلی برای در نظر گرفتن اثرات مقادیر مقیاس کوچک و نظریه الاستیسیته گرتین-مرداخ برای در نظر گرفتن اثرات سطحی بر اساس مدل پوسته الاستیک ارتوتروپیک، مورد بررسی قرار میگیرد. تأثیرات محیط ویسکوالاستیک سیتوپلاسم اطراف میکروتوبولها، با استفاده از مدل جامد خطی استاندارد (SLS) محاسبه می شود. نتایج بدست آمده از این تحقیق برای کمانش محوری میکروتوبولهایی که توسط پروتئینهای ضمیمه با سایر میکروتوبولها مرتبط شدند و میکروتوبولهایی که با ماده تاکسول تثبیت شدهاند، با مقادیر بدست آمده از مشاهدات تجربی در منابع، مقایسه شدهاند. نتایج نشان داد که مدل پوسته ارتوتروپیک ارائه شده با در نظر گرفتن هر دو اثر سطحی و غیر محلی، می تواند رفتار کمانشی میکروتوبولها را با دقت بالایی توصیف کند.

کلمات کلیدی: میکروتوبول (ریزلوله)، رفتار مکانیکی، تئوری الاستیسیته غیرمحملی

۱- مقدمه

به منظور طراحی ماشینهای کشاورزی نیازمند مدل سازی دقیق گیاهان بطوری که کمترین آسیب بافتی و درون سلولی به گیاه وارد شود، هستیم. عموماً آسیبهای بافتی و درون سلولی به سرعت قابل تشخیص نیستند و این آسیبها با گذر زمان نمایان می شوند که غالباً غیر قابل بازگشت هستند. از این رو بی بردن به خواص مکانیکی سلول، به منظور جلوگیری از آسیبهای جدی و غیرقابل جبران به گیاه و محصولات آنها امری ضروری است. در طراحی مرسوم ماشینهای کشاورزی، گیاهان و محصولات کشاورزی ماده الاستیک یا ویسکوالاستیک فرض می شوند و ملاک طراحی آسیب ظاهری و بیرونی آنها تحت تأثیر نیروهای مکانیکی وارده می باشد که بنا به دلایل گفته شده، فرضی به دور از واقعیت است و ممکن است منجر به آسیبهای درونی فراوانی گردد. به عنوان اولین پژوهش درباره بررسی رفتار مکانیکی سلولهای گیاهی، در این تحقیق، رفتار مکانیکی میکروتوبول یا ریزلوله (میکرو یعنی ریز و توبول یعنی لوله) به عنوان کوچکترین و اصلیترین واحد مقاومت مکانیکی سلولهای گیاهی، مورد بررسی قرار گرفته می شود.

در سالهای اخیر تحقیقات فراوانی روی تحلیل رفتار مکانیکی سازههای ریزمقیاس و از جمله کمانش نانو لولهها و نانوصفحههای گرافینی انجام شده است. با بررسی تحقیقات چند سال اخیر می توان دریافت که به منظور مدل سازی نانسازهها، استفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحملی که نخستین بار توسط ارینگن پیشنهاد شد، بسیار مورد توجه قرار گرفته است که در اینجا به ذکر مواردی از مطالعات مربوط به تحلیل رفتار مکانیکی نانو لولهها و نانوصفحههای گرافنی و میکروتوبولها می پردازیم.

پرادهان [۱]، کمانش نانوصفحه گرافنی تک لایه را بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحملی و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر بررسی نمود. برای حل معادلات به دست آمده با در نظر گرفتن شرایط مرزی تکیه گاه ساده روش نایر^۲ را به کار گرفت و با حل تحلیلی بار بحرانی کمانش را به دست آورد و اثر مقیاس کوچک را روی بار بحرانی بررسی نمود. همچنین اثرات پارامتر غیرمحملی، طول، ضخامت و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر روی بار بحرانی کمانش تحقیق شد. در مطالعه ای که توسط پرادهان و مارمو [۲]، انجام شد اثر مقیاس کوچک روی آنالیز کمانش نانوصفحه

* نویسنده مسئول، kamalimoein@gmail.com



یازدهمین کنگره ملی مهندسی مکانیک بیوسیستم و مکانیزاسیون ایران



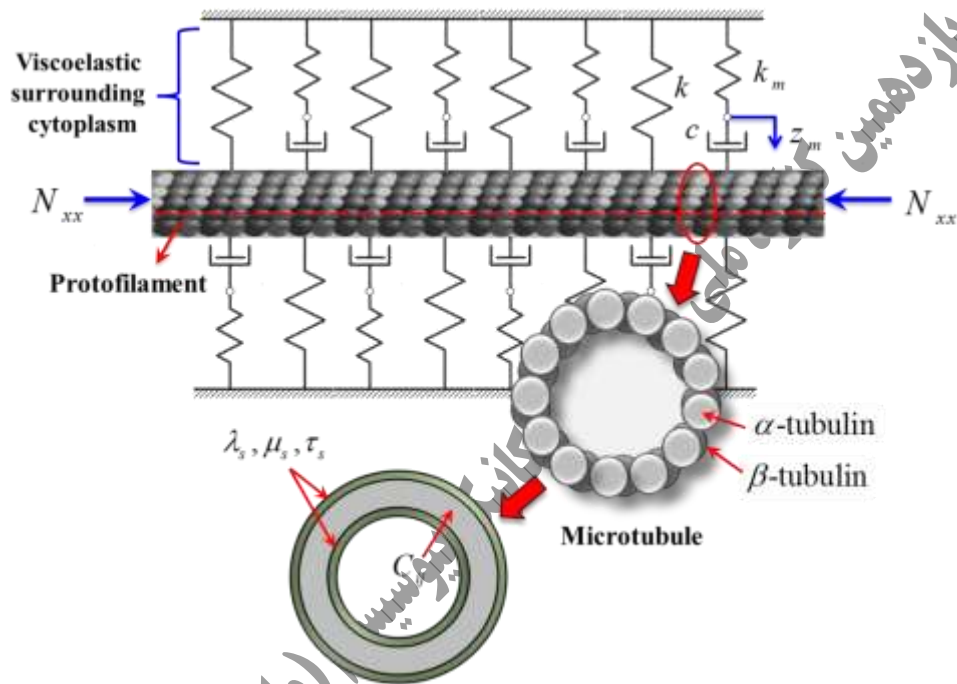
گرافنی تک‌لایه قرار گرفته روی یک ماده الاستیک، براساس تئوری غیرمحملی صفحه بررسی شد. هر دو مدل بستر وینکلر^۱ و پاسترناک^۲ برای مدل‌سازی بکار گرفته شدند. معادلات دیفرانسیل حاکم بر اساس اصل کار مجازی استخراج و از روش DQM برای حل آنها استفاده شد. نتایج نشان دادند که بارهای کمانشی نانوصفحه‌های گرافنی تک‌لایه به طور جدّ به ضرایب مقیاس کوچک و صلبیت ماده الاستیک وابسته هستند. فادیکار و پرادهان [۳]، فرمول‌بندی‌های اجزاء محدود را برای الاستیسیته غیرمحملی دو حالت (الف) تیر اولر-برنولی و (ب) صفحه کیرشلف گزارش کردند. تئوری الاستیسیته دیفرانسیلی غیرمحملی بررسی شد و تکنیک اجزاء محدود گالرکین بکار گرفته شد. برای هر دو مورد (نانوتیرها و نانوصفحه‌ها) فرم‌های ضعیف معادلات حاکم استخراج شده و تابعیت‌های انرژی به دست آمدند. آیدوگو و آکسنسر [۴]، کمانش و ارتعاش نانوصفحه‌ها را با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحملی بررسی نمودند. برای صفحه‌های با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده، حل ناویلر و برای صفحه‌های با دو لبه مخالف تکیه‌گاه ساده و لبه‌های باقیمانده تکیه‌گاه دلخواه، حل لوی^۳ را بکار بردند و برای پارامتر غیرمحملی متفاوت، طول متفاوت صفحه‌ها و شرایط مرزی مختلف نتایج استخراج و مشخص شد که اثرات غیرمحملی حتماً باید در نانوصفحه‌ها در نظر گرفته شوند. همچنین این نتیجه حاصل شده که شرایط مرزی گیردار به اثرات غیرمحملی حساس‌تر هستند. در تحقیقی که توسط نازندر [5]، انجام شد آنالیز کمانش نانوصفحه‌های ایزوتروپیک با استفاده از تئوری اصلاح شده دو متغیره صفحه و اثرات مقیاس کوچک غیرمحملی مورد بررسی قرار گرفت.

با توجه به ساختار پیوسته میکروتوبول‌ها و استحکام خمش بالا در مقایسه با سایر اجزای اسکلت سلولی، مدل‌های تیر و پیوسته پیوسته برای مطالعه رفتار مکانیکی میکروتوبول‌ها استفاده شده است. نتایج مدل‌های پیوسته می‌تواند در تعیین خواص مکانیکی میکروتوبول‌ها به همراه تکنیک‌های آزمایشی مانند پرتوهای نوری [۶]، نوسانات حرارتی [۷] و میکروسکوپ نیروی اتمی [۸] کمک کند. لی و همکاران [۹] از یک مدل پیوسته ی الاستیک ارتوتروپیک برای مطالعه وابستگی طول سختی خمشی و مدول یانگ میکروتوبول‌ها استفاده کرد. علاوه بر این، وانگ و همکاران [۱۰] یک مدل پیوسته الاستیسیته ارتوتروپیک را برای تحلیل ارتعاشات میکروتوبول‌ها ارائه کرد. از تئوری تیرهای اویلر-برنولی برای بررسی اثرات شبکه و سیتوزول بر روی کمانش میکروتوبول‌ها [۱۱] استفاده شد. تأثیرات تغییر شکل پیوسته و برش عرضی بر رفتار مکانیکی میکروتوبول‌ها با استفاده از تئوری محلی سنتی [۱۲] مورد بررسی قرار گرفت. با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحملی برای ویژگی‌های مکانیکی نانوسیال [۴] و نانو ساختارهای کرنی [۱۳] بررسی شد و گائو و لی [۱۴] اثرات غیر محلی را بر سرعت رشد کمانش و خمش میکروتوبول‌ها در سلول‌های زنده بر اساس نظریه الاستیسیته غیر محلی به همراه مدل تیر تیموشنکو مورد مطالعه قرار دادند. علاوه بر این، ویژگی‌های ارتعاش میکروتوبول‌های پروتئینی با استفاده از مدل تیر غیر محلی تیموشنکو و نحوه انتشار موج مورد بررسی قرار گرفت [۱۵].

ضعف مکانیک پیوسته غیرمحملی در این است که تنها می‌تواند کاهش سختی تانومواد را پیش‌بینی کند. با این حال، تحقیقات اخیر نشان داده اند که سختی آنها ممکن است در مقیاس میکرو یا نانو افزایش یابد. برای غلبه بر کمبودهای تئوری الاستیسیته غیرمحملی، باید اثرات سطحی را مورد توجه قرار داد. بنا به تحقیقات انجام شده، تا به امروز یک مدل پیوسته ارتوتروپیک با در نظر گرفتن اثرات سطح برای میکروتوبول‌ها ارائه نشده است. در پژوهش حاضر، اثرات سطحی بر رفتار خمشی میکروتوبول‌ها تحت نیروی فشاری محوری بر اساس نظریه الاستیسیته گورتین-مرداخ با مدل پیوسته تغییر شکل برشی مرتبه اول مورد بررسی قرار گرفته است. اثرات مقیاس کوچک نیز با استفاده از تئوری الاستیسیته غیر محلی در نظر گرفته می‌شود. به منظور در نظر گرفتن اثرات محیط ویسکوالاستیک سیتوپلاسم بر رفتار کمانشی میکروتوبول در سلول‌های زنده، از مدل جامد خطی استاندارد^۴ (SLS) استفاده می‌شود. اجزای تشکیل دهنده میکروتوبول ارتوتروپیک فرض می‌شوند. معادلات حاکم با استفاده از اصل کار مجازی بدست خواهند آمد. یک راه حل دقیق برای بارهای خمشی میکروتوبول‌ها با شرایط مرزی ساده شده ارائه می‌شود. به منظور مقایسه نتایج، معادلات حاکم با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی (DQM) حل عددی می‌شوند. نتایج بدست آمده با داده‌های آزمایشی موجود در بررسی منابع که با روش پرتوهای نوری برای میکروتوبول‌های تثبیت شده توسط پروتئین‌های ضمیمه با یکدیگر و تاکسول مقایسه می‌شوند. در نهایت، اثرات مدول الاستیسیته سطحی، تنش باقی مانده سطوح، پارامتر مقیاس کوچک، تعداد پرتوفیلامنت‌ها و ضرایب مدل SLS بر روی کمانش میکروتوبول‌ها مورد بررسی قرار گرفته می‌شود.

Winkler-type^۱
Pasternak-type^۲
Levy^۳
Standard linear solid^۴

در این بخش، یک مدل پوسته تغییر شکل برشی با در نظر گرفتن اثرات سطح، برای مدل کردن رفتار کمانشی میکروتوبولها، ارائه شده است. شکل (۱) یک میکروتوبول را تحت یک نیروی محوری نشان می دهد. میکروتوبولها شامل اجزای رشته ای موازی هستند که پروتوفیلانمنت نامیده می شوند. همانطور که در شکل نشان داده شده است، هر پروتوفیلانمنت از تکرار زنجیروار $\alpha\beta$ -توبولین تشکیل شده است که در امتداد جهت محوری به صورت سر به سر پیوند داده شده اند. در حالت کلی میکروتوبولها با ۸ - ۱۷ پروتوفیلانمنت یافت می شوند [۱۶].



شکل ۱- یک میکروتوبول با لایه های سطحی تحت بار محوری در محیط ویسکوالاستیک سیتوپلاسم

در حالی که میکروتوبول استاندارد از ۱۳ پروتوفیلانمنت ساخته شده است. یک میکروتوبول با طول L ، شعاع متوسط R ، ضخامت معادل h و ضخامت مؤثر h_0 را در نظر بگیرید. نشان داده شده است که ضخامت های مؤثر و معادل باید به منظور پیش بینی به طور صحیح برای تغییر شکل صفحه ای و خمش میکروتوبولها در نظر گرفته شوند [۹، ۱۰]. ثابت های الاستیک لایه های سطحی و مواد حجمی را به ترتیب با λ_s و μ_s بیان خواهند شد. همچنین τ_s نشان دهنده تنش باقی مانده سطح می باشد. سیستم مختصات استوانه ای با محورهای x ، θ و z برای میکروتوبول استفاده می شود. مبدأ سیستم مختصات در سطح میانی ساختار لوله ای شکل قرار دارد. بر اساس نظریه پوسته تغییر شکل برشی مرتبه اول، میدان جابجایی می تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$U_x(x, \theta, z, t) = u(x, \theta, t) + z \phi_x(x, \theta, t), \quad (۱)$$

$$U_\theta(x, \theta, z, t) = v(x, \theta, t) + z \phi_\theta(x, \theta, t), \quad (۲)$$

$$U_z(x, \theta, z, t) = w(x, \theta, t) \quad (۳)$$

بطوری که w ، v ، u مؤلفه های بردار جابجایی از نقطه $(x, y, 0)$ در صفحه میانی است. ϕ_x و ϕ_θ چرخش های صفحه میانی به ترتیب حول

محورهای X و θ با استفاده از معادلات (۱) تا (۳)، می توان مؤلفه های کرنش را به شرح زیر بیان کرد:



$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^0 + z \kappa_{xx}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}^0 + z \kappa_{\theta\theta}, \quad \gamma_{x\theta} = \gamma_{x\theta}^0 + z \kappa_{x\theta},$$

$$\gamma_{\theta z} = \gamma_{\theta z}^0, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{xz}^0 \quad (4)$$

$$\varepsilon_{xx}^0 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^0 = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R}, \quad \gamma_{x\theta}^0 = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\kappa_{xx} = \frac{\partial \phi_x}{\partial x}, \quad \kappa_{\theta\theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta}, \quad \kappa_{x\theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial \phi_x}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi_\theta}{\partial x},$$

$$\gamma_{xz}^0 = \phi_x + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{\theta z}^0 = \phi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{R} \quad (5)$$

بر اساس تئوری الاستیسیته غیر محلی، روابط بنیادی برای مواد حجمی به صورت زیر بیان می‌شود [۱۷]:

$$\left[1 - (e_0 a)^2 \nabla^2 \right] \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

که σ_{ij} و C_{ij} به ترتیب مؤلفه‌های تانسور تنش غیر محلی و تانسور الاستیسیته مرتبه چهارم است؛ ∇^2 اپراتور لاپلاسین است که توسط رابطه‌ی $\nabla^2 (*) = \partial^2 (*) / \partial x^2 + (1/R^2) \partial^2 (*) / \partial \theta^2$ برای یک مسئله دو بعدی در سیستم مختصات استوانه‌ای استفاده می‌شود. e_0 و a به ترتیب بیانگر پارامتر کالیبراسیون و طول مشخصه داخلی است. تعیین مقدار پارامتر کالیبراسیون برای دقت مدل‌های پیوسته غیر محلی ضروری است. این پارامتر می‌تواند از داده‌های تجربی یا نتایج شبیه‌سازی‌های دینامیک مولکولی تعیین شود. با استفاده از نظریه گورتین-مرداخ [۱۸] در روابط الاستیسیته غیر محلی [۱۷]، روابط مرتبط با بخش سطحی میکروتوبول توسط روابط زیر داده می‌شوند:

$$\left[1 - (e_0 a)^2 \nabla^2 \right] \sigma_{ij}^s = \tau_s \delta_{ij} + (\tau_s + \lambda_s) \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2(\mu_s - \tau_s) \varepsilon_{ij} + \tau_s U_{i,j}^s, \\ \left[1 - (e_0 a)^2 \nabla^2 \right] \sigma_{iz}^s = \tau_s U_{z,i}^s, \quad i, j = x, \theta \quad (7)$$

در این روابط، δ_{ij} و σ_{ij}^s دلتا کرونیکر و تانسور تنش غیر محلی لایه سطحی هستند. لازم به ذکر است که معادله ساختاری (۷) هنگامی که پارامتر مقیاس کوچک به صفر می‌رسد، به معادله سنتی محلی لایه‌های سطحی، تبدیل می‌گردد.

با استفاده از معادلات (۱) تا (۵) و (۷) مولفه‌های تنش سطحی غیر محلی به صورت زیر به دست می‌آیند:



$$\begin{aligned}
 [1-(e_0a)^2 \nabla^2] \sigma_{xx}^s &= (\lambda_s + 2\mu_s) \varepsilon_{xx} + (\tau_s + \lambda_s) \varepsilon_{\theta\theta} + \tau_s, \\
 [1-(e_0a)^2 \nabla^2] \sigma_{\theta\theta}^s &= (\tau_s + \lambda_s) \varepsilon_{xx} + (\lambda_s + 2\mu_s) \varepsilon_{\theta\theta} + \tau_s \left(1 - \frac{w}{R}\right), \\
 [1-(e_0a)^2 \nabla^2] \sigma_{x\theta}^s &= \mu_s \gamma_{x\theta} - \tau_s \left(\frac{\partial v}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_\theta}{\partial x}\right), \\
 [1-(e_0a)^2 \nabla^2] \sigma_{\theta x}^s &= \mu_s \gamma_{x\theta} - \frac{\tau_s}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial \theta}\right), \\
 [1-(e_0a)^2 \nabla^2] \sigma_{xz}^s &= \tau_s \frac{\partial w}{\partial x}, \quad [1-(e_0a)^2 \nabla^2] \sigma_{\theta z}^s = \frac{\tau_s}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta}
 \end{aligned} \tag{8}$$

در نظریه‌های پوسته کلاسیک فرض می‌شود که مؤلفه تنش σ_{zz} در مقایسه با تنش‌های درون صفحه کم است. از آنجایی که این فرضیه شرایط تعادلی بر روی لایه‌های سطحی میکروتوبول‌ها را برآورده نمی‌کند [۱۹]، فرض می‌شود σ_{zz} در جهت محور z بطور خطی تغییر می‌کند. با استفاده از این فرض و روابط تعادل سطوح، داریم:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zz} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \sigma_{xz}^{s+}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{s+}}{\partial \theta} - \left(\frac{\partial \sigma_{xz}^{s-}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{s-}}{\partial \theta} \right) \right] \\
 &+ \frac{z}{h} \left[\frac{\partial \sigma_{xz}^{s+}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{s+}}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial \sigma_{xz}^{s-}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{s-}}{\partial \theta} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{9}$$

با جایگذاری معادله (۹) در معادله (۸) معادله زیر به دست خواهد آمد:

$$[1-(e_0a)^2 \nabla^2] \sigma_{zz} = \frac{2\tau_s z}{h} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \tag{10}$$

بدست آوردن مؤلفه کرنش ε_{zz} با استفاده از معادله فوق، و سپس قرار دادن روابط بدست آمده در معادله (۶)، مؤلفه‌های تنش غیرمحلّی مواد حجمی را به صورت زیر می‌توان بیان کرد:

$$\begin{aligned}
 [1-(e_0a)^2 \nabla^2] \sigma_{xx} &= \left(C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}} \right) \varepsilon_{xx} + \left(C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}} \right) \varepsilon_{\theta\theta} + \frac{2C_{13}\tau_s z}{hC_{33}} \nabla^2 w, \\
 [1-(e_0a)^2 \nabla^2] \sigma_{\theta\theta} &= \left(C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}} \right) \varepsilon_{xx} + \left(C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}} \right) \varepsilon_{\theta\theta} + \frac{2C_{23}\tau_s z}{hC_{33}} \nabla^2 w, \\
 [1-(e_0a)^2 \nabla^2] \sigma_{x\theta} &= C_{66} \gamma_{x\theta}
 \end{aligned} \tag{11}$$



منتجه‌های تنش به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
 N_{xx}^t &= N_{xx} + \sigma_{xx}^{s+} + \sigma_{xx}^{s-}, \\
 N_{\theta\theta}^t &= N_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}^{s+} + \sigma_{\theta\theta}^{s-}, \\
 N_{x\theta}^t &= N_{x\theta} + \frac{1}{2}(\sigma_{x\theta}^{s+} + \sigma_{\theta x}^{s+} + \sigma_{x\theta}^{s-} + \sigma_{\theta x}^{s-}), \\
 M_{xx}^t &= M_{xx} + \frac{h}{2}(\sigma_{xx}^{s+} - \sigma_{xx}^{s-}), \\
 M_{\theta\theta}^t &= M_{\theta\theta} + \frac{h}{2}(\sigma_{\theta\theta}^{s+} - \sigma_{\theta\theta}^{s-}), \\
 M_{x\theta}^t &= M_{x\theta} + \frac{h}{4}[(\sigma_{x\theta}^{s+} + \sigma_{\theta x}^{s+}) - (\sigma_{x\theta}^{s-} + \sigma_{\theta x}^{s-})], \\
 Q_x^s &= \sigma_{xz}^{s+} + \sigma_{xz}^{s-}, \quad Q_\theta^s = \sigma_{\theta z}^{s+} + \sigma_{\theta z}^{s-}
 \end{aligned} \tag{13}$$

که S^+ و S^- به ترتیب سطح لایه‌های خارجی و داخلی را نشان می‌دهد. نتیجه‌های تنش مواد حجمی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
 N_{xx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz, \quad N_{\theta\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\theta\theta} dz, \quad N_{x\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{x\theta} dz, \\
 M_{xx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz, \quad M_{\theta\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\theta\theta} z dz, \quad M_{x\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{x\theta} z dz, \\
 Q_x &= k_s \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz, \quad Q_\theta = k_s \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\theta z} dz
 \end{aligned} \tag{14}$$

که در آن k_s ضریب اصلاح برشی است. با استفاده از معادله (۱۴) و جایگذاری معادلات (۴)، (۸) و (۱۱) در معادله (۱۳)، می‌توان به راحتی روابط زیر را برای نتیجه‌های تنش بدست آورد:

$$\begin{aligned}
 (1-\eta\nabla^2)N_{xx}^t &= A_{11}^t \varepsilon_{xx}^0 + A_{12}^t \varepsilon_{\theta\theta}^0 + 2\tau_s, \\
 (1-\eta\nabla^2)N_{\theta\theta}^t &= A_{12}^t \varepsilon_{xx}^0 + A_{22}^t \varepsilon_{\theta\theta}^0 + 2\tau_s - \frac{2\tau_s}{R} w, \\
 (1-\eta\nabla^2)N_{x\theta}^t &= A_{66}^t \gamma_{x\theta}^0, \\
 (1-\eta\nabla^2)M_{xx}^t &= D_{11}^t \kappa_{xx} + D_{12}^t \kappa_{\theta\theta} + E_{11}^t \nabla^2 w, \\
 (1-\eta\nabla^2)M_{\theta\theta}^t &= D_{12}^t \kappa_{xx} + D_{22}^t \kappa_{\theta\theta} + E_{22}^t \nabla^2 w, \\
 (1-\eta\nabla^2)M_{x\theta}^t &= D_{66}^t \kappa_{x\theta}, \\
 (1-\eta\nabla^2)Q_x &= k_s A_{55} \gamma_{xz}, \quad (1-\eta\nabla^2)Q_\theta = k_s A_{44} \gamma_{\theta z}, \\
 (1-\eta\nabla^2)Q_x^s &= 2\tau_s \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (1-\eta\nabla^2)Q_\theta^s = \frac{2\tau_s}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta}
 \end{aligned} \tag{15}$$



بطوری که:

$$A'_{11} = A_{11}^c + 2(\lambda_s + 2\mu_s) = \left(C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}} \right) h + 2(\lambda_s + 2\mu_s),$$

$$A'_{12} = A_{12}^c + 2(\tau_s + \lambda_s) = \left(C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}} \right) h + 2(\tau_s + \lambda_s),$$

$$A'_{22} = A_{22}^c + 2(\lambda_s + 2\mu_s) = \left(C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}} \right) h + 2(\lambda_s + 2\mu_s),$$

$$A'_{66} = A_{66}^c + 2\mu_s - \tau_s = C_{66}h + 2\mu_s - \tau_s,$$

$$D'_{11} = D_{11}^c + (\lambda_s + 2\mu_s) \frac{h_0^2}{2} = \left(C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}} \right) \frac{h_0^3}{12} + (\lambda_s + 2\mu_s) \frac{h_0^2}{2},$$

$$D'_{12} = D_{12}^c + (\tau_s + \lambda_s) \frac{h_0^2}{2} = \left(C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}} \right) \frac{h_0^3}{12} + (\tau_s + \lambda_s) \frac{h_0^2}{2},$$

$$D'_{22} = D_{22}^c + (\lambda_s + 2\mu_s) \frac{h_0^2}{2} = \left(C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}} \right) \frac{h_0^3}{12} + (\lambda_s + 2\mu_s) \frac{h_0^2}{2},$$

$$D'_{66} = D_{66}^c + (2\mu_s - \tau_s) \frac{h_0^2}{4} = \frac{C_{66}h_0^3}{12} + (2\mu_s - \tau_s) \frac{h_0^2}{4},$$

$$A_{44} = C_{44}h, \quad A_{55} = C_{55}h, \quad E'_{11} = \frac{\tau_s C_{13} h_0^2}{6C_{33}}, \quad E'_{22} = \frac{\tau_s C_{23} h_0^2}{6C_{33}} \quad (16)$$

که در آن یک میکروتوبول معمولی شامل ۱۳ پروتوفیلامنت موازی است که در امتداد طول آن قرار دارند (شکل ۱). از طرفی، ترکیب پلیمری α و β توبولین‌ها، پروتوفیلامنت را تشکیل می‌دهد. مشاهدات آزمایشگاهی نشان می‌دهد که پیوند جانبی بین دو پروتوفیلامنت مجاور بسیار ضعیف‌تر از پیوند طولی بین دو α و β توبولین در امتداد جهت محوری است [۵۴، ۵۵]. بنابراین، مدول الاستیک جانبی کم‌تر از مدول الاستیک طولی است و میکروتوبول یک ماده ارتوتروپیک است. سختی مواد حجمی میکروتوبول‌ها در صفحه توسط $A_{22}^c = E_\theta h / (1 - \nu_x \nu_\theta)$ تعیین می‌گردد. علاوه بر این، سختی خمشی مؤثر مواد حجمی میکروتوبول‌ها از طریق $A_{66}^c = G_{x\theta} h$ و $A_{11}^c = E_x h / (1 - \nu_x \nu_\theta)$ ، $D_{66}^c = G_{x\theta} h_0^3 / 12$ و $D_{11}^c = E_x h_0^3 / 12 (1 - \nu_x \nu_\theta)$ ، $D_{22}^c = E_\theta h_0^3 / 12 (1 - \nu_x \nu_\theta)$ محاسبه می‌شود. همانطور که از این روابط دیده می‌شود، سختی درون صفحه و خمشی با استفاده از ضخامت معادل (h) و ضخامت مؤثر (h_0) بدست می‌آید. با استفاده از اصل کار مجازی، معادلات حاکم می‌توانند به شرح زیر باشند:



$$\frac{\partial N'_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N'_{x\theta}}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial N'_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N'_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{Q_\theta}{R} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial Q_x^s}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\theta^s}{\partial \theta} - \frac{N'_{\theta\theta}}{R} + q + \frac{\partial}{\partial x} \left(N'_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left(N'_{x\theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(N'_{x\theta} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(N'_{\theta\theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial M'_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M'_{x\theta}}{\partial \theta} - Q_x = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial M'_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M'_{\theta\theta}}{\partial \theta} - Q_\theta = 0 \quad (20)$$

که در این روابط q نشان دهنده بار عرضی است. به منظور شبیه سازی اثرات ویسکوالاستیک سیتوپلاسم اطراف بر رفتار کمانشی MT، از مدل SLS استفاده شده است. همانطور که در شکل (1) نشان داده شده است، این مدل ویسکوالاستیک شامل دو بازوی مستقیم است. بازوی راست (در قسمت فوقانی شکل 1) متشکل از یک فنر و دمپر است که به صورت سری به یکدیگر متصل می شوند. این بازو به طور کلی به عنوان بازوی ماکسول معروف است. بازوی چپ (در قسمت بالایی) فنر خطی است. اخیراً مدل SLS برای پاسخ‌های دینامیکی میکروتوبول‌ها در آکسون‌ها تحت تنش‌های مکانیکی با موفقیت مورد استفاده قرار گرفته است [۵۶]. بر اساس مدل SLS، بار عرضی بر اساس محیط ویسکوالاستیک سیتوپلاسم اطراف می تواند به صورت زیر بیان شود:

$$q = -kw - c \left(\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial z_m}{\partial t} \right),$$

$$k_m z_m - c \left(\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial z_m}{\partial t} \right) = 0 \quad (21)$$

که در آن k ثابت بازوی چپ است و k_m و c به ترتیب ثابت فنر و ضریب میرایی بازو ماکسول است. z_m نشان دهنده موقعیت نقطه پایه در بازوی ماکسول است. لازم به ذکر است که مدل کلویین-ویگت را می توان از مدل SLS با گذاشتن $\partial z_m / \partial t = 0$ در معادله (۱۷) بدست آورد. علاوه بر این، در صورتی که در معادلات فوق، $k=0$ فرض شود مدل SLS به مدل ویسکوالاستیک ماکسول تبدیل خواهد شد. اعمال اپراتور غیرمحللی $L_{\eta l} (*) = (*) - \eta \nabla^2 (*)$ در هر دو طرف معادلات حاکم (۳-۷۹ تا ۸۳) و سپس جایگذاری نتیجه‌های تنش از معادله (۱۵) و برای q از معادله (۱۷)، معادلات دیفرانسیل حاکم برای رفتار کمانشی میکروتوبول‌ها به صورت زیر دست می آید:



$$A_{11}^t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{A_{66}^t}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R} (A_{12}^t + A_{66}^t) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{A_{12}^t}{R} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (22)$$

$$\frac{1}{R} (A_{12}^t + A_{66}^t) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + A_{66}^t \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{A_{22}^t}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{k_s A_{44}}{R^2} v + \frac{1}{R^2} (A_{22}^t + k_s A_{44} - 2\tau_s) \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{k_s A_{44}}{R} \phi_\theta = 0 \quad (23)$$

$$-\frac{A_{12}^t}{R} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{R^2} (A_{22}^t + k_s A_{44}) \frac{\partial v}{\partial \theta} + (k_s A_{55} + 2\tau_s) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} (k_s A_{44} + 2\tau_s) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{R^2} (A_{22}^t - 2\tau_s) w + k_s A_{55} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{k_s A_{44}}{R} \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta} + (1 - \eta \nabla^2) \left[-k w - c \left(\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial z_m}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx}^t \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{x\theta}^t \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(N_{x\theta}^t \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(N_{\theta\theta}^t \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] = 0 \quad (24)$$

$$-(k_s A_{55} - E_{11}^t \nabla^2) \frac{\partial w}{\partial x} + D_{11}^t \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{D_{66}^t}{R^2} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial \theta^2} - k_s A_{55} \phi_x + \frac{1}{R} (D_{12}^t + D_{66}^t) \frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial x \partial \theta} = 0 \quad (25)$$

$$\frac{k_s A_{44}}{R} v - \frac{1}{R} (k_s A_{44} - E_{22}^t \nabla^2) \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{R} (D_{12}^t + D_{66}^t) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial \theta} + D_{66}^t \frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial x^2} + \frac{D_{22}^t}{R^2} \frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial \theta^2} - k_s A_{44} \phi_\theta = 0 \quad (26)$$

$$k_m z_m - c \left(\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial z_m}{\partial t} \right) = 0 \quad (27)$$

لازم به ذکر است که معادلات دیفرانسیل غیر کلاسیک (۲۲ تا ۲۷) زمانی که اثرات غیرمحملی و سطح نادیده گرفته شوند، معادلات به تئوری پوسته تغییر شکل برشی کلاسیک، کاهش می‌یابند. لازم به ذکر است که ترم سوم در رابطه دوم معادله (۱۵) در مقایسه با ترم چهارم برای میکروتوبول‌ها بسیار کوچک است زیرا حداقل طول میکروتوبول‌ها در حدود چند میکرومتر است، در حالی که شعاع متوسط آنها در حدود چند نانومتر است.

۳- روش حل

در این بخش، راه حل‌های دقیق برای بارهای کمانشی و نرخ رشد کمانش میکروتول تحت نیروی فشاری محوری ارائه شده است. به منظور تسهیل کار، پارامترهای بدون بعد زیر معرفی می‌شوند:



$$\langle \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{z}_m \rangle = \left\langle \frac{u}{h}, \frac{v}{h}, \frac{w}{h}, \frac{z_m}{h} \right\rangle, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \bar{\lambda} = \frac{L}{R}, \quad \bar{h} = \frac{L}{h}, \quad \chi = \frac{e_0 a}{L},$$

$$\langle A_{11}^*, A_{12}^*, A_{22}^*, A_{66}^* \rangle = \left\langle \frac{A_{11}^t}{A_{11}^c}, \frac{A_{12}^t}{A_{11}^c}, \frac{A_{22}^t}{A_{11}^c}, \frac{A_{66}^t}{A_{11}^c} \right\rangle, \quad \langle E_{11}^*, E_{22}^* \rangle = \left\langle \frac{E_{11}^t}{A_{11}^c h^2}, \frac{E_{22}^t}{A_{11}^c h^2} \right\rangle,$$

$$\langle A_{44}^*, A_{55}^*, \tau_s^* \rangle = \left\langle \frac{A_{44}^t}{A_{11}^c}, \frac{A_{55}^t}{A_{11}^c}, \frac{\tau_s^t}{A_{11}^c} \right\rangle, \quad \langle \hat{N}_{xx}, \hat{N}_{x\theta}, \hat{N}_{\theta\theta} \rangle = \left\langle \frac{N_{xx}^t}{A_{11}^c}, \frac{N_{x\theta}^t}{A_{11}^c}, \frac{N_{\theta\theta}^t}{A_{11}^c} \right\rangle,$$

$$\langle \bar{k}, \bar{k}_m, \bar{c} \rangle = \left\langle \frac{kL^2}{A_{11}^c}, \frac{k_m L^2}{A_{11}^c}, \frac{cL}{\sqrt{\rho h A_{11}^c}} \right\rangle, \quad \tau = \frac{t}{L} \sqrt{\frac{A_{11}^c}{\rho h}},$$

$$\langle D_{11}^*, D_{12}^*, D_{22}^*, D_{66}^* \rangle = \left\langle \frac{D_{11}^t}{A_{11}^c h^2}, \frac{D_{12}^t}{A_{11}^c h^2}, \frac{D_{22}^t}{A_{11}^c h^2}, \frac{D_{66}^t}{A_{11}^c h^2} \right\rangle \quad (28)$$

با جایگزینی روابط فوق در معادلات (۲۱ تا ۲۷)، معادلات حاکم را می توان به فرم بی بعد، به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$A_{11}^* \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} + \bar{\lambda}^2 A_{66}^* \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \theta^2} + \bar{\lambda} (A_{12}^* + A_{66}^*) \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \xi \partial \theta} + \bar{\lambda} A_{12}^* \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} = 0 \quad (29)$$

$$\bar{\lambda} (A_{12}^* + A_{66}^*) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \theta} + A_{66}^* \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \xi^2} + \bar{\lambda}^2 A_{22}^* \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \theta^2} - k_s \bar{\lambda}^2 A_{44}^* \bar{v} + \bar{\lambda}^2 (A_{22}^* + k_s A_{44}^* - 2\tau_s^*) \frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} + k_s \bar{\lambda} \bar{h} A_{44}^* \phi_\theta = 0 \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & -\bar{\lambda} A_{12}^* \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} - \bar{\lambda}^2 (A_{22}^* + k_s A_{44}^*) \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + (k_s A_{55}^* + 2\tau_s^*) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} \\ & + \bar{\lambda}^2 (k_s A_{44}^* + 2\tau_s^*) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \theta^2} - \bar{\lambda}^2 (A_{22}^* - 2\tau_s^*) \bar{w} + k_s A_{55}^* \bar{h} \frac{\partial \phi_x}{\partial \xi} \\ & + k_s \bar{\lambda} \bar{h} A_{44}^* \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta} + (1 - \chi^2 \bar{\nabla}^2) \left[-k_s \bar{w} - \bar{c} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau} - \frac{\partial \bar{z}_m}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\hat{N}_{xx} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} \right) \right. \\ & \left. + \bar{\lambda} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\hat{N}_{x\theta} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} \right) + \bar{\lambda} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\hat{N}_{x\theta} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} \right) + \bar{\lambda}^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\hat{N}_{\theta\theta} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} \right) \right] = 0 \quad (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\bar{h} \left(k_s A_{55}^* - \frac{E_{11}^*}{h^2} \bar{\nabla}^2 \right) \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} + D_{11}^* \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial \xi^2} + \bar{\lambda}^2 D_{66}^* \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial \theta^2} - k_s \bar{h}^2 A_{55}^* \phi_x \\ & + \bar{\lambda} (D_{12}^* + D_{66}^*) \frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial \xi \partial \theta} = 0 \quad (32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & k_s A_{44}^* \bar{\lambda} \bar{h} \bar{v} - \bar{\lambda} \bar{h} \left(k_s A_{44}^* - \frac{E_{22}^*}{h^2} \bar{\nabla}^2 \right) \frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} + \bar{\lambda} (D_{12}^* + D_{66}^*) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial \xi \partial \theta} \\ & + D_{66}^* \frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial \xi^2} + \bar{\lambda}^2 D_{22}^* \frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial \theta^2} - k_s A_{44}^* \bar{h}^2 \phi_\theta = 0 \quad (33) \end{aligned}$$



$$\bar{k}_m \bar{z}_m - \bar{c} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau} - \frac{\partial \bar{z}_m}{\partial \tau} \right) = 0 \quad (34)$$

که در این روابط $\bar{\nabla}^2$ عملگر لاپلاسین بی بعدی را نشان می‌دهد که به صورت $\bar{\nabla}^2(*) = \partial^2(*)/\partial \xi^2 + \bar{\lambda}^2 \partial^2(*)/\partial \theta^2$ تعریف شده است. شرایط مرزی میکروتوبول تکیه‌گاه ساده فرض می‌شوند. برای ارضای این شرایط مرزی، جابجایی و چرخش بی بعد ساختار لوله‌ای می‌تواند به صورت زیر بیان شود [19].

$$\bar{u}(\xi, \theta, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{U}_{mn} \cos(m\pi\xi) \sin(n\theta) e^{\beta_0 \tau},$$

$$\bar{v}(\xi, \theta, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{V}_{mn} \sin(m\pi\xi) \cos(n\theta) e^{\beta_0 \tau},$$

$$\bar{w}(\xi, \theta, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{W}_{mn} \sin(m\pi\xi) \sin(n\theta) e^{\beta_0 \tau},$$

$$\bar{z}_m(\xi, \theta, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Z}_{mn} \sin(m\pi\xi) \sin(n\theta) e^{\beta_0 \tau},$$

$$\phi_x(\xi, \theta, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{xmn} \cos(m\pi\xi) \sin(n\theta) e^{\beta_0 \tau},$$

$$\phi_\theta(\xi, \theta, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{\theta mn} \sin(m\pi\xi) \cos(n\theta) e^{\beta_0 \tau} \quad (35)$$

که در اینجا m و n به ترتیب تعداد موج نیمه محوری و تعداد موج جانبی است. β_0 نرخ رشد کمانش غیرمحللی میکروتوبول‌ها است و توسط رابطه $\beta_0 = L\Theta\sqrt{\rho h/A_{11}^c}$ تعریف می‌شود که Θ بیانگر نرخ رشد کمانش است. $\bar{U}_{mn}, \bar{V}_{mn}, \bar{W}_{mn}, \bar{Z}_{mn}, \Phi_{xmn}$ و $\Phi_{\theta mn}$ ثوابت مربوط به شکل حالت کمانش هستند. با جایگزینی معادله (35) در معادله (34)، به راحتی می‌توان رابطه $\bar{Z}_{mn} = \bar{c}\beta_0\bar{W}_{mn}/(\bar{k}_m + \bar{c}\beta_0)$ را بدست آورد. با جایگذاری این رابطه و معادله (35) در معادلات دیفرانسیل غیرمحللی (29) تا (33) معادله زیر بدست خواهد آمد:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & 0 & 0 \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & 0 & \gamma_{25} \\ \gamma_{13} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \gamma_{34} & \gamma_{35} \\ 0 & 0 & \gamma_{43} & \gamma_{44} & \gamma_{45} \\ 0 & \gamma_{25} & \gamma_{53} & \gamma_{45} & \gamma_{55} \end{pmatrix} + \hat{N}_{xx} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_{mn} \\ \bar{V}_{mn} \\ \bar{W}_{mn} \\ \Phi_{xmn} \\ \Phi_{\theta mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (36-3)$$

در اینجا \hat{N}_{xx} بار کمانشی غیرمحللی است. γ_{ij} و K_0 در ضمیمه الف آورده شده‌اند. لازم به ذکر است که می‌توان معادلات کلاسیک کمانش میکروتوبول‌ها تحت بار محوری را از طریق صفر در نظر گرفتن پارامتر غیر محلی، تنش سطحی باقی مانده و مدول‌های الاستیک سطحی در معادله فوق، بدست آورد. به طور مشابه، نرخ رشد کمانش میکروتوبول‌ها را به شرح زیر می‌توان بدست آورد:



یازدهمین کنگره ملی مهندسی مکانیک بیوسیستم و مکانیزاسیون ایران



انجمن مهندسی ماشین‌های کشاورزی و مکانیزاسیون ایران



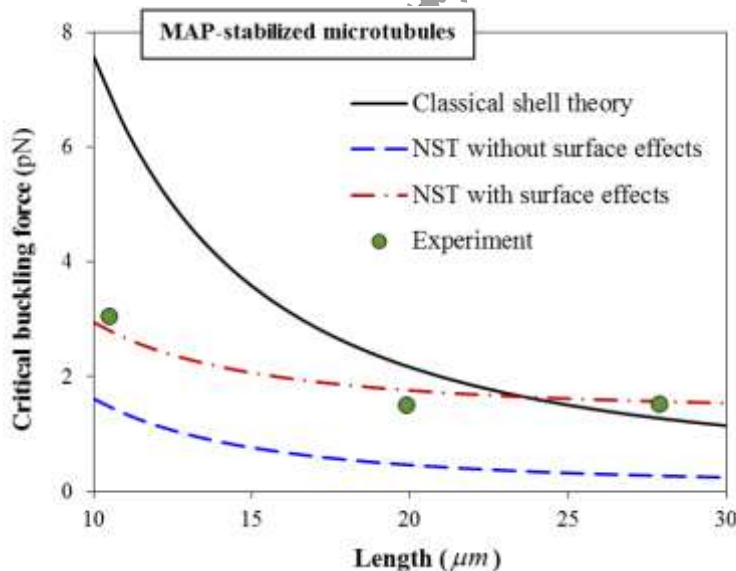
BuAli Sina University

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & 0 & 0 \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & 0 & \gamma_{25} \\ \gamma_{13}^k & \gamma_{32}^k & \gamma_{331}^k & \gamma_{34}^k & \gamma_{35}^k \\ 0 & 0 & \gamma_{43} & \gamma_{44} & \gamma_{45} \\ 0 & \gamma_{25} & \gamma_{53} & \gamma_{45} & \gamma_{55} \end{pmatrix} + \beta_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{13}^c & \gamma_{32}^c & \gamma_{332}^c & \gamma_{34}^c & \gamma_{35}^c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{U}_{mn} \\ \bar{V}_{mn} \\ \bar{W}_{mn} \\ \Phi_{xmn} \\ \Phi_{\theta mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (37-3)$$

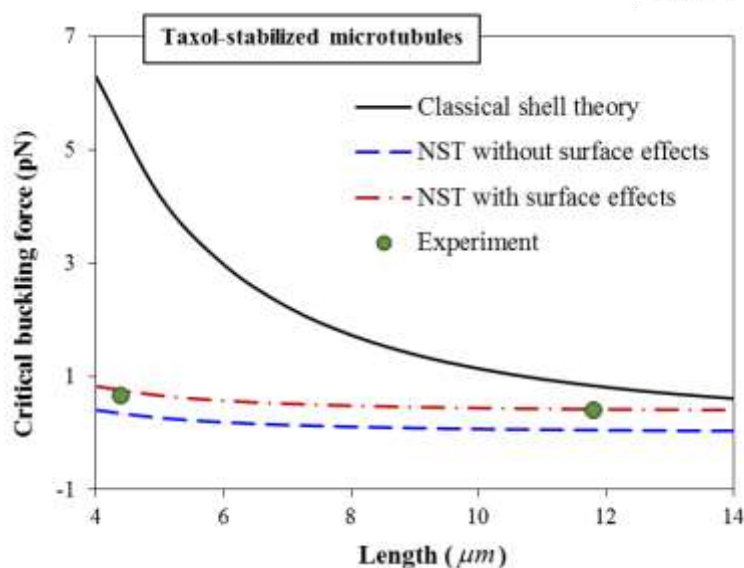
ضرایب γ_{ij}^α در ضمیمه الف آورده شده‌اند. معادلات (۳۶) و (۳۷)، کمناش میکروتوبول‌ها را تحت بارهای محوری به ترتیب در محیط بدون سیتوپلاسم و در حضور سیتوپلاسم توصیف می‌کنند. یک میکروتوبول (در سلول‌های زنده) زمانی کمناش می‌کند که نرخ رشد کمناش در آن مثبت شود.

۴- نتایج و بحث

به منظور اعتبارسنجی مدل ارائه شده برای تحلیل اثرات اندازه و سطح بر کمناش میکروتوبول‌ها، نیروهای کمناشی بحرانی یک میکروتوبول تحت نیروی محوری با داده‌های آزمایشگاهی گزارش شده توسط کوراچی و همکاران مقایسه می‌شوند [۲۰]. شکل‌های (۲) و (۳) نیروی کمناش بحرانی را نسبت به طول میکروتوبول‌های تثبیت شده با یکدیگر (MAP) و میکروتوبول‌های تثبیت شده با تاکسول را نشان می‌دهد. فرض بر این است که میکروتوبول شامل ۱۳ پروتوفیلامنت است. خواص هندسی میکروتوبول به صورت $h_0 = 1.6 \text{ nm}$ ، $h = 2.7 \text{ nm}$ ، $R = 13 \text{ nm}$ و $k_s = 5/6$ [۲۱، ۱۰] داده شده است. نشان داده شده است که میکروتوبول‌ها رفتار همسان‌گرد ندارند و استحکام آن‌ها در جهات طولی و شعاعی متفاوت است. بنابراین، میکروتوبول‌ها به صورت ارتوتروپیک فرض می‌شوند. مدول طولی میکروتوبول‌های تثبیت شده با یکدیگر (MAP) و میکروتوبول‌های تثبیت شده با تاکسول به ترتیب $E_x = 2 \text{ GPa}$ و $E_x = 0.3 \text{ GPa}$ [9, 20] در نظر گرفته می‌شوند. سایر خواص ماده به صورت $\nu_x = 0.3$ ، $E_\theta/E_x = 0.001$ و $G_{x\theta}/E_x = 0.001$ [۹، ۱۰] در نظر گرفته شده است.

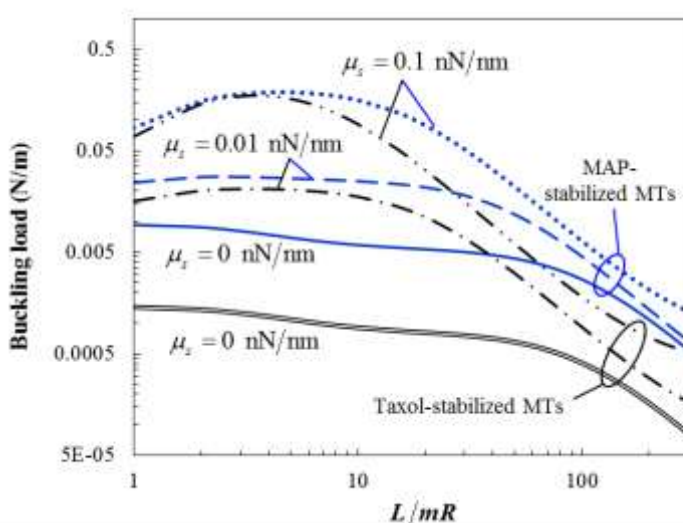


شکل ۲- مقایسه نتایج تحقیق حاضر با داده‌های تجربی [۲۰] برای میکروتوبول‌های تثبیت شده MAP



شکل ۳- مقایسه نتایج تحقیق حاضر با داده‌های تجربی [۲۰] برای میکروتوبول‌های تثبیت شده با تاکسول.

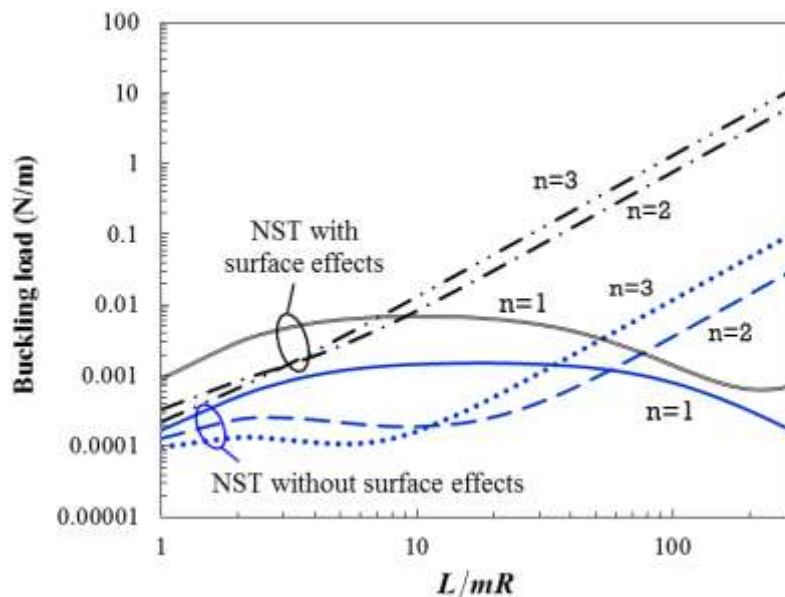
شکل (۴)، بارهای کمانشی میکروتوبول‌ها نسبت به تغییرات L/mR برای هر دو میکروتوبول تثبیت شده با MAP و تاکسول را نشان می‌دهد. مقادیر مختلف ثابت الاستیسیته سطح μ_s در نظر گرفته شده است. سایر مقادیر خصوصیات سطح به صورت $\lambda_s = 0.5 \text{ nN/nm}$ و $\tau_s = 0$ در نظر گرفته شده است و از اثر پارامتر غیر محلی صرف‌نظر شده است. از شکل، می‌توان نتیجه گرفت که بارکمانش بحرانی با افزایش مقاومت ثابت الاستیک سطح برای هر دو نوع میکروتوبول افزایش می‌یابد.



شکل ۴- اثر ثابت الاستیک سطحی μ_s بر بارکمانشی بحرانی میکروتوبول‌ها

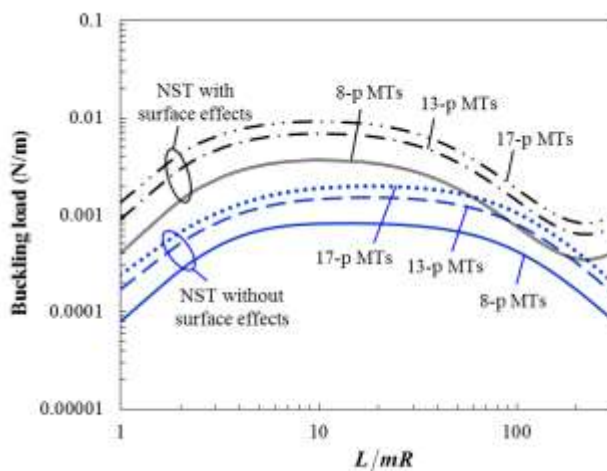
در شکل (۵) تغییرات بار کمانشی را برحسب طول موج محوری بدون بعد برای اعداد مختلف موج‌های شعاعی نشان می‌دهد. نتایج ارائه شده برای تئوری پوسته غیرمحلی (NST) با در نظر گرفتن و بدون در نظر گرفتن اثرات سطح می‌باشند. مقدار پارامتر غیر محلی به صورت $e_0 a = 20 \text{ nm}$ است. خصوصیات کششی لایه‌های سطحی $\lambda_s = 0.5 \text{ nN/nm}$ ، $\mu_s = 0.01 \text{ nN/nm}$ و $\mu_s = 0$ ، $\tau_s = 0.1 \text{ pN/}\mu\text{m}$ برای NST با اثرات سطحی در نظر گرفته شده است، در حالی که مقدار آن برای NST که در آن تأثیر لایه‌های سطحی نادیده گرفته شده، صفر گذاشته می‌شود. فرض بر این است که میکروتوبول با پروتئین‌های ضمیمه با دیگر میکروتوبول‌ها تثبیت شده‌اند. در شکل (۵) نشان داده شده که بر خلاف اثر مقادیر مقیاس کوچک، در نظر گرفتن اثرات سطحی موجب افزایش بارهای کمانشی میکروتوبول‌ها می‌شود که به دلیل اثر افزایشی لایه‌های سطحی بر سختی کمانش ساختارهای لوله‌ای است. تعداد موج پیوسته (n) تا حد زیادی بر بارهای خمشی میکروتوبول‌ها تأثیر می‌گذارد. لازم به ذکر است که

حداقل بار کمانشی بستگی به مقدار طول موج محوری دارد.



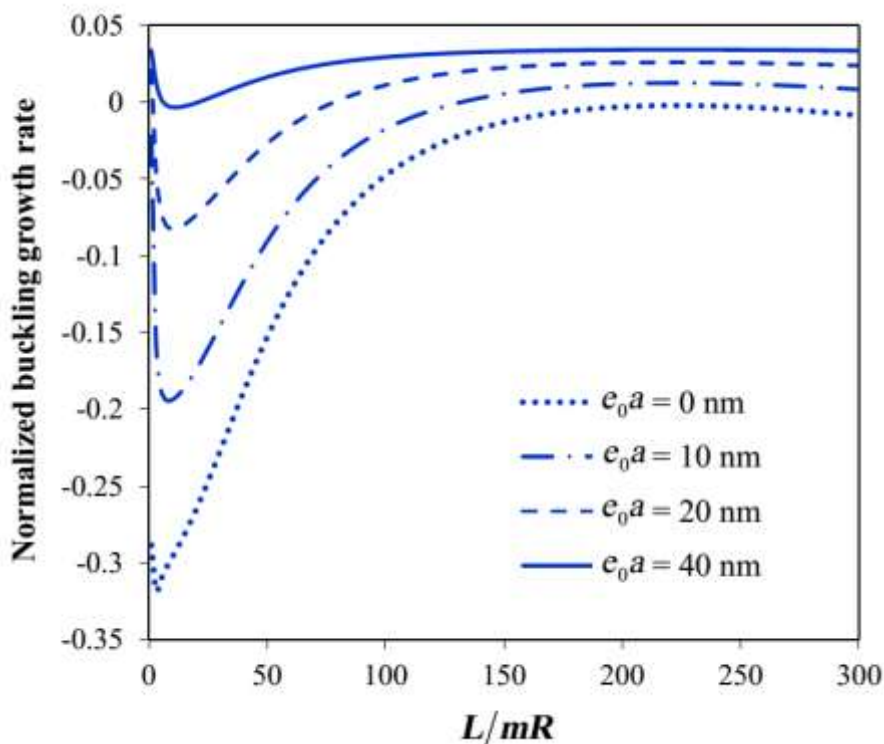
شکل ۵- تغییرات بار کمانشی میکروتوبول‌ها بر حسب طول موج محوری بدون بعد برای تعداد مختلف موج‌های شعاعی.

در نهایت، به منظور بررسی تأثیر تعداد پروتوفیلامنت، تغییرات بار کمانش بر حسب L/mR برای میکروتوبول‌های ۸، ۱۳ و ۱۷ پروتوفیلامنتی در شکل (۶) ترسیم شده است. متوسط شعاع برای میکروتوبول‌های ۸، ۱۳ و ۱۷ پروتوفیلامنتی به ترتیب ۰/۶، ۱۳ و ۱۶ نانومتر است [۱۶]. همانطور که در شکل دیده می‌شود، تعداد پروتوفیلامنت‌ها تأثیر بیشتری بر بارهای خمشی میکروتوبول‌ها دارد. در واقع، تعداد پروتوفیلامنت‌هایی که نیروی فشاری محوری را تحمل می‌کنند، با افزایش تعداد پروتوفیلامنت‌ها افزایش می‌یابد و این باعث افزایش ظرفیت کمانش میکروتوبول می‌شود.



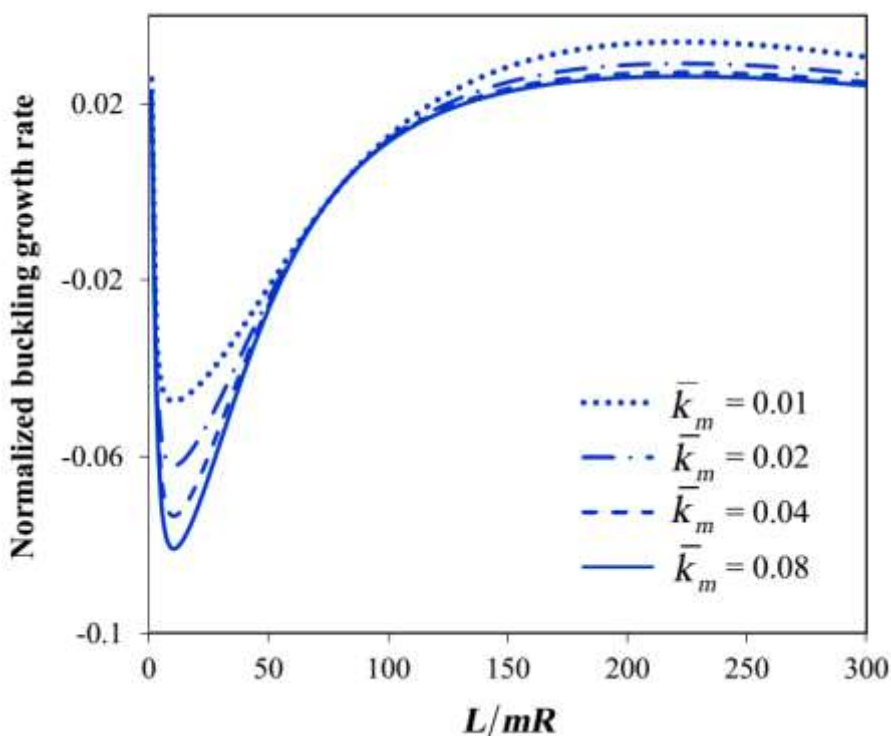
شکل ۶- تغییرات بار کمانشی میکروتوبول‌ها بر حسب طول موج محوری بدون بعد برای تعداد مختلف پروتوفیلامنت‌ها.

شکل (۷) تأثیرات مقیاس کوچک را بر روی پاسخ کمانشی میکروتوبول تحت نیروی محوری فشاری در محیط ویسکوالاستیک سیتوپلاسم نشان می‌دهد. ثابت فنر بدون بعد بازوی چپ مدل SLS ۰/۰۹۵ قرار داده شده است. مشاهده شد که اثرات غیرمحملی تا حد زیادی بر نرخ رشد کمانش تأثیر می‌گذارد. با افزایش پارامتر غیرمحملی، نرخ رشد کمانش، به تدریج افزایش می‌یابد. در حقیقت، پارامتر مقیاس کوچک اثر کمتری بر سختی ساختار دارد و این باعث افزایش احتمال کمانش می‌شود.



شکل ۷- تغییرات نرخ رشد کمانش میکروتوبولها بر حسب طول موج محوری بدون بعد برای پارامترهای غیر محلی متفاوت.

تأثیر ثابت فنر بازوی ماکسول بر رفتار کمانشی میکروتوبولها در شکل (۸) نشان داده شده است. مشخص شد که نرخ رشد کمانش بدون بعد با افزایش سفتی بازو ماکسول کاهش می‌یابد. با این حال، کمانش میکروتوبولها از سفتی بازو سمت چپ نسبت به بازوی راست بیشتر تحت تأثیر قرار می‌گیرد (بخش بالائی از شکل ۱ را ببینید). این واضح است زیرا فنر بازوی چپ به طور مستقیم به ساختار متصل است. علاوه بر این مشاهده شده است که تمام انحنایها از یک نقطه بین $L/mR = 50$ و $L/mR = 100$ عبور می‌کنند. این بدان معنی است که نرخ رشد کمانش مستقل از بازوی ماکسول در طول موج مشخصی محوری است ($L/mR \approx 79$). ضریب دمپر برای $L/mR > 79$ اثر کمتری بر نرخ رشد کمانش دارد. با این حال، نرخ رشد کمانش برای $L/mR < 79$ با افزایش ضریب دمپر افزایش می‌یابد. به این معنی است که اثر بازوی ماکسول به مقدار طول موج محوری میکروتوبولها بستگی دارد.



شکل ۸- تغییرات نرخ رشد کمانش میکروتوبول‌ها نسبت به طول موج محوری بدون بعد برای ثابت‌های مختلف فنر بازوی ماکسول.

۵- نتایج کلی

بر اساس نظریه پوسته تغییر شکل برشی غیرمحلی، اثرات اندازه بر روی کمانش میکروتوبول‌های تثبیت شده با MAP و تثبیت شده با تاکسول تحت نیروی فشاری محوری بررسی شد. اثرات سطح و اندازه با استفاده از نظریه الاستیسیته گر-تین-مرداخ و تئوری الاستیسیته غیرمحلی در نظر گرفته شد. مدل SLS برای شبیه‌سازی اثرات محیط ویسکولاستیک استفاده شد. از اصل کار مجازی برای به دست آوردن معادلات حاکم استفاده گردید. یک راه حل تحلیلی دقیق برای میکروتوبول‌های با تکیه‌گاه ساده ارائه شده است. مقایسه نتایج بدست آمده در این بخش از تحقیق با داده‌های تجربی ارائه شده توسط سایر محققان نشان می‌دهد که مدل پوسته فعلی با مقادیر مناسب ثابت‌های سطح و پارامترهای مقیاس کوچک نتایج دقیق‌تری نسبت به آنچه که توسط نظریه پوسته کلاسیک بدست آمده، ارائه می‌دهد. علاوه بر این، یافته شد که میکروتوبول‌های تثبیت شده با تاکسول در بار کمانش بحرانی کاهش داشتند. مدول الاستیسیته سطحی اثر باربری بر بارهای کمانشی میکروتوبول‌ها دارد. تنش باقی مانده سطحی در میکروتوبول‌های تثبیت شده با تاکسول تأثیر معناداری داشت. بار کمانش میکروتوبول‌ها با افزایش تعداد پروتوفیل‌ها افزایش می‌یابد. علاوه بر این، نرخ رشد کمانش در طول‌های طولانی مستقل از طول موج محوری است، در حالی که برای میکروتوبول‌های با طول کوتاه‌تر، به شدت به طول موج محوری وابسته است. افزایش سختی شبکه رشته‌ای اطراف منجر به کاهش نرخ رشد کمانش میکروتوبول‌ها می‌شود.

مراجع

1. Pradhan, S.C., *Buckling of single layer graphene sheet based on nonlocal elasticity and higher order shear deformation theory*. Physics Letters A, 2009. **373**(45): p. 4182-4188.
2. Pradhan, S.C. and T. Murmu, *Small scale effect on the buckling analysis of single-layered graphene sheet embedded in an elastic medium based on nonlocal plate theory*. Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, 2010. **42**(5): p. 1293-1301.
3. Phadikar, J.K. and S.C. Pradhan, *Variational formulation and finite element analysis for nonlocal elastic nanobeams and nanoplates*. Computational Materials Science, 2010. **49**(3): p. 492-499.



4. Aydogdu, M. and I. Elishakoff, *On the vibration of nanorods restrained by a linear spring in-span*. Mechanics Research Communications, 2014. ۵۷. p. 90-96.
5. Narendar, S., *Buckling analysis of micro-/nano-scale plates based on two-variable refined plate theory incorporating nonlocal scale effects*. Composite Structures, 2011. **93**(12): p. 3093-3103.
6. Masashi, K., H. Masayuki, and T. Hideo, *Buckling of a single microtubule by optical trapping forces: Direct measurement of microtubule rigidity*. Cell Motility, 1995. **30**(3): p. 221-228.
7. Pampaloni, F., et al., *Thermal fluctuations of grafted microtubules provide evidence of a length-dependent persistence length*. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2006. **103**(27): p. 10248.
8. Vinckier, A., et al., *Dynamical and mechanical study of immobilized microtubules with atomic force microscopy*. Journal of Vacuum Science & Technology B: Microelectronics and Nanometer Structures Processing, Measurement, and Phenomena, 1996. **14**(2): p. 1427-1431.
9. Li, C., C.Q. Ru, and A. Mioduchowski, *Length-dependence of flexural rigidity as a result of anisotropic elastic properties of microtubules*. Biochemical and Biophysical Research Communications, 2006. **349**(3): p. 1145-1150.
10. Wang, C.Y., C.Q. Ru, and A. Mioduchowski, *Orthotropic elastic shell model for buckling of microtubules*. Physical Review E, 2006. **74**(5): p. 052901.
11. Li, T., *A mechanics model of microtubule buckling in living cells*. Journal of Biomechanics, 2008. **41**(8): p. 1722-1729.
12. Gu, B., Mai, Y.W. & Ru, C.Q., *Mechanics of microtubules modeled as orthotropic elastic shells with transverse shearing*. Acta Mechanica., 2009. **207**: p. 195-209.
13. Mohammadi, M., Safarabadi, M., Rastgoo, A., Farajpour, A., *Hygro-mechanical vibration analysis of a rotating viscoelastic nanobeam embedded in a visco-Pasternak elastic medium and in a nonlinear thermal environment*. Acta Mech., 2016. **227**: p. 2207-2232.
14. Gao, Y. and F.-M. Lei, *Small scale effects on the mechanical behaviors of protein microtubules based on the nonlocal elasticity theory*. Biochemical and Biophysical Research Communications, 2009. **387**(3): p. 467-471.
15. Heireche, H., et al., *Nonlocal elasticity effect on vibration characteristics of protein microtubules*. Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, 2010. **42**(9): p. 2375-2379.
16. Wang, C.Y. and L.C. Zhang, *Circumferential vibration of microtubules with long axial wavelength*. Journal of Biomechanics, 2008. **41**(9): p. 1892-1896.
17. Eringen, A.C., *Nonlocal Continuum Field Theories*. 2002, New York: Springer.
18. Gurtin, M.E. and A. Ian Murdoch, *Surface stress in solids*. International Journal of Solids and Structures, 1978. **14**(6): p. ۴۳۱-۴۴۰.
19. Rouhi, H., R. Ansari, and M. Darvizeh, *Size-dependent free vibration analysis of nanoshells based on the surface stress elasticity*. Applied Mathematical Modelling, 2016. **40**(4): p. 3128-3140.
20. Kurachi, M., M. Hoshi, and H. Tashiro, *Buckling of a single microtubule by optical trapping forces: Direct measurement of microtubule rigidity*. Cell Motility, 1995. **30**(3): p. 221-228.
21. Wang, J. and Y. Gao, *Nonlocal orthotropic shell model applied on wave propagation in microtubules*. Applied Mathematical Modelling, 2016. **40**(11): p. 5731-5744.